

Curso Propedéutico para la Especialización en Estadística Aplicada

Departamento de Probabilidad y Estadística

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas
IIMAS, UNAM

Varios miembros del Departamento de Probabilidad y Estadística del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas de la UNAM que han participado a través de los años en la impartición del Curso Propedéutico para la Especialización en Estadística Aplicada han contribuido en la elaboración de estas notas.

En las secciones de cálculo y álgebra: Carlos Erwin Rodríguez, Gonzalo León, Alberto Molina, Ma. Esther Trejo, Lizbeth Naranjo.

En las secciones de probabilidad y estadística: Juan González y Leticia Gracia Medrano.

Índice general

1. Álgebra Elemental	1
1.1. Conceptos Fundamentales de Álgebra	1
1.1.1. Los Números Reales	1
1.1.2. Conjuntos de Números	1
1.1.3. Propiedades de los Números Reales	2
1.1.4. Suma y Multiplicación de Fracciones	6
1.1.5. Exponentes y Radicales	8
1.2. Expresiones Algebraicas	13
1.2.1. Productos Notables	14
1.2.2. Factorización	16
1.2.3. Ecuaciones	19
1.2.4. Desigualdades	24
1.2.5. Sistema de Ecuaciones	28
1.2.6. Sumas Σ	38
2. Cálculo Elemental	43
2.1. Las Funciones y sus Gráficas	43
2.2. Límites de Funciones y Funciones Continuas	50
2.2.1. Límites de Funciones	50
2.2.2. Funciones Continuas	54
2.3. La Derivada	61
2.3.1. Conceptos Básicos	61
2.3.2. Aplicaciones de la Derivada	66

2.4. La Integral	79
2.4.1. Las Funciones Exponencial y Logarítmica	85
3. Elementos del Álgebra de Matrices	90
3.1. Conceptos Fundamentales	90
3.1.1. Vectores y Matrices	90
3.1.2. Transpuesta	93
3.2. Operaciones de Matrices	94
3.2.1. Adición y Multiplicación	94
3.2.2. Productos de Vectores y Matrices	96
3.2.3. Traza	97
3.2.4. Determinantes	98
3.2.5. Operaciones Elementales de Renglón	99
3.2.6. Inversa de una Matriz Cuadrada	100
3.2.7. Dependencia Lineal y Rango	102
3.2.8. Matrices Definidas y Semi-Definidas Positivas	102
3.3. Sistemas de Ecuaciones Lineales	103
3.3.1. Transformaciones Lineales	103
3.3.2. Sistemas de Ecuaciones Lineales	104
3.4. Raíces y Vectores Propios	105
3.5. Ejercicios	110
A. Solución de Ejercicios	112
A.1. Solución de los ejercicios de Álgebra	112
A.2. Solución de los ejercicios de Cálculo	118
A.3. Solución de los ejercicios de Álgebra de Matrices	123

Índice de figuras

1.1. Recta real	2
1.2. Puntos en $\mathbb{R}^2$	29
1.3. La recta	30
1.4. La recta pendiente	31
1.5. Ejemplo de sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}^2$	35
2.1. Dominio D , contradominio E y función f	43
2.2. Ejemplo de la biblioteca: dominio D , contradominio E y función f	44
2.3. Rectas con pendiente $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ aproximándose a $f'(a)$	62
2.4. Función $f(x) = x^3$ junto con la recta tangente al punto $(1, f(1)) = (1, 1)$	63
2.5. Composición de f y g	65
2.6. Mínimo local	67
2.7. Máximo local	67
2.8. Un punto tal que su derivada es cero, pero no es ni máximo ni mínimo local	68
2.9. Gráfica de función continua con un máximo y mínimo local	69
2.10. Gráfica de $f(x) = x^3 - 12x$	70
2.11. Ejemplo de la aplicación de la derivada	71
2.12. Comportamiento de $f'(x)$ cuando $f(x)$ es cóncava hacia arriba	72
2.13. Punto de Inflexión	73
2.14. Criterio de la segunda derivada, en donde se localiza un mínimo y máximo local, respectivamente	74
2.15. Función $f(x) = 12 + 2x^2 - x^4$	76
2.16. Función $f(x) = (x^2 - 1)^2$	77
2.17. Función $f(x) = 3x^5 - 5x^3$	77

2.18. Función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$	77
2.19. Función $f(x)$ tal que $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$	79
2.20. Aproximación área debajo de f	80
2.21. Aproximación área de f cuando es tanto positiva como negativa	80
2.22. Área de la función $1/t$ si $t > 1$	86
2.23. Área de la función $1/t$ si $0 < t < 1$	86
A.1. Solución gráfica $f(z) = (z - 2)^2$	118
A.2. Solución gráfica $h(w) = \frac{2}{w^2}$	119
A.3. Solución gráfica $g(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 2x^3$	120
A.4. Solución gráfica $f(x) = x^4 - 2$	121
A.5. Solución gráfica $g(x) = x^3 - x^2 - 2x$	122
A.6. Solución gráfica $h(x) = x^5 + x^3$	122

Capítulo 1

Álgebra Elemental

1.1. Conceptos Fundamentales de Álgebra

1.1.1. Los Números Reales

Trabajaremos con los números reales todo el tiempo, por lo tanto, una buena idea es conocer sus propiedades básicas. Muchas de éstas parecen obvias e inocentes y por este motivo gran cantidad de personas no las toman en cuenta, sin embargo, cuando avanzan en el estudio de las matemáticas, tienen serios problemas al tratar de comprender los manejos algebraicos más comunes.

Antes de enunciar las propiedades de los números reales, vamos a definir varios conjuntos importantes.

1.1.2. Conjuntos de Números

Para las finalidades de estas notas consideraremos como primitivos los conceptos de “conjunto, elemento y pertenencia”, y los manejaremos en la forma intuitiva usual; es decir, los elementos pertenecen a conjuntos y un conjunto está formado por todos sus elementos. Así pues, dos conjuntos son iguales si y solo si, tienen los mismos elementos.

Al conjunto de los números que utilizamos para contar, $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$, le llamaremos el conjunto de los números naturales. A este conjunto lo denotaremos como $\mathbb{N}$. Así, podemos construir otro conjunto formado por los naturales unión el cero; $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Otro conjunto importante es el de los números enteros:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Los números racionales estarán formados por el cociente de dos números enteros (siempre y cuando el denominador sea distinto de cero):

$$\mathbb{Q} = \{m/n : m \in \mathbb{Z} \text{ } n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \neq 0\}.$$

Es claro que la contención entre los conjuntos de números que enunciamos anteriormente está dada de la siguiente forma:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Ahora definiremos el conjunto que más nos interesará, el conjunto de los números reales. A éste conjunto lo denotaremos con el símbolo $\mathbb{R}$ y formalmente se puede probar que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Para tener una idea de quienes son los números reales, podemos imaginarnos una recta, en donde cada punto en la recta representa un número real (figura 1.1).

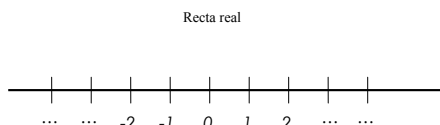


Figura 1.1: Recta real

Al conjunto $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}^c = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ se le conoce como el conjunto de los números irracionales.

1.1.3. Propiedades de los Números Reales

Normalmente en álgebra y en general en matemáticas utilizamos símbolos o letras para denotar a los números, ¿por qué?. A continuación se enunciarán las propiedades de $\mathbb{R}$ y el porqué del uso de letras en vez de números será evidente.

1. Conmutatividad en la Suma (Adición)

La suma de cualesquiera dos números reales es conmutativa:

$$3 + 5 = 5 + 3, \quad 1.37 + \sqrt{3} = \sqrt{3} + 1.37, \quad -10.7 + 2 = 2 - 10.7 = 2 + (-10.7).$$

Para ser más rigurosos y economizar espacio, podemos escribir:

$$\text{sean } a, b \in \mathbb{R} \text{ tales que } a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Asociatividad en la Adición

Sabemos que siempre se cumple que:

$$130 = 10 + 120 = 10 + (100 + 20) = (10 + 100) + 20 = 110 + 20 = 130.$$

De forma general:

$$\text{sean } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tales que } a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Después de enunciar la propiedad conmutativa y asociativa debe ser claro el porqué es conveniente usar letras en vez de números. Sin embargo, si esto no es así, la respuesta es muy sencilla; lo que buscamos en matemáticas es dar o manejar afirmaciones que sean válidas para cualquier número dentro un conjunto de números, en este caso para cualquier número real y si éste es nuestro objetivo, no podemos remitirnos sólo a unos cuantos casos particulares, tenemos que buscar afirmaciones para cualquier número dentro del conjunto, y esto lo hacemos asumiendo que una cierta letra puede tomar cualquier valor dentro del mismo conjunto. De aquí en adelante procederemos sólo de ésta forma.

3. Neutro Aditivo

$$0 + a = a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

4. Inverso Aditivo

$$a + (-a) = (-a) + a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

5. Conmutatividad en la Multiplicación

$$ab = ba \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

6. Asociatividad en la Multiplicación

$$a(bc) = (ab)c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

7. Neutro Multiplicativo

$$1(a) = (a)1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

8. Inverso Multiplicativo

Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, entonces

$$a \left(\frac{1}{a} \right) = \left(\frac{1}{a} \right) a = 1.$$

9. Propiedad Distributiva (que involucra a la adición y multiplicación de números reales)

$$a(b + c) = ab + ac \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R};$$

$$(a + b)c = ac + bc \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd,$$

de forma totalmente análoga podemos hacer

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd,$$

y como vemos el resultado es el mismo. Por la propiedad distributiva también podemos ir “al revés”

$$\begin{aligned} ac + ad + bc + bd &= a(c + d) + b(c + d) \\ &= (a + b)(c + d). \end{aligned}$$

A éste procedimiento le llamaremos factorización, pero lo veremos más adelante con mayor detalle.

Ejemplo 2 Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $a + b = c + b \Rightarrow a = c$.

Demostración:

$$\begin{aligned} a + b = c + b &\Rightarrow (a + b) + (-b) = (c + b) + (-b) && \text{sumar } (-b) \\ &\Rightarrow a + (b + (-b)) = c + (b + (-b)) && \text{asociatividad en la adición} \\ &\Rightarrow a + 0 = c + 0 && \text{inverso aditivo} \\ &\Rightarrow a = c && \text{neutro aditivo.} \end{aligned}$$

Teorema 1. Si $a \in \mathbb{R} \Rightarrow (a)0 = 0$.

Vamos a utilizar las propiedades (1)-(9) de los números reales para la demostración del teorema.

Demostración:

$$\begin{aligned} (a)0 &= (a)(0 + 0) && \text{neutro aditivo} \\ &= (a)0 + (a)0 && \text{distributiva} \\ &\Rightarrow (a)0 + [(-a)0] = [(a)0 + (a)0] + [(-a)0] && \text{sumar } (-a)0 \\ &\Rightarrow [(a)0 + (-a)0] = (a)0 + [(a)0 + (-a)0] && \text{asociatividad en la adición} \\ &\Rightarrow 0 = (a)0 + 0 && \text{inverso aditivo} \\ &\Rightarrow 0 = (a)0 && \text{neutro aditivo.} \end{aligned}$$

Observación 1. Como demostramos que si $a \in \mathbb{R} \Rightarrow (a)0 = 0$, de donde se sigue que no puede existir tal cosa como: $0\left(\frac{1}{0}\right) = 1$, entonces el 0 no puede tener inverso multiplicativo. Para ver esto, supongamos que el 0 tiene inverso multiplicativo como lo vimos $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow (a)0 = 0$. Si $\frac{1}{0}$ existe, entonces, para cualquier $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 a \times 0 &= 0 && \text{Teorema 1} \\
 \Rightarrow (a \times 0) \left(\frac{1}{0}\right) &= 0 \times \left(\frac{1}{0}\right) && \text{multiplicar } \left(\frac{1}{0}\right) \\
 \Rightarrow a \left(0 \times \left(\frac{1}{0}\right)\right) &= 0 \times \left(\frac{1}{0}\right) && \text{asociatividad en la multiplicación} \\
 \Rightarrow a(1) &= 1 && \text{inverso multiplicativo} \\
 \Rightarrow a &= 1 && \text{neutro multiplicativo,}
 \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\frac{1}{0}$ no puede estar definido, pues si lo estuviera sólo existiría el número real 1, que claramente es falso.

Otro resultado muy importante que se usa frecuentemente es el siguiente:

Proposición 1. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ó $b = 0$ y puede ser que $a = 0$ y $b = 0$.

Demostración:

Por casos:

Caso 1) Si $a = 0$ y $b = 0 \Rightarrow ab = 0$.

Caso 2) Si $a \neq 0$ y $ab = 0 \Rightarrow (1/a)ab = (1/a)0 \Rightarrow 1 * b = 0 \Rightarrow b = 0$.

Caso 3) Si $b \neq 0$ y $ab = 0 \Rightarrow (1/b)ab = (1/b)0 \Rightarrow 1 * a = 0 \Rightarrow a = 0$.

A continuación enunciaremos varias propiedades que todos conocemos muy bien, sin embargo, no las demostraremos. Lo que debe quedar claro es que no son “mágicas”, y pueden ser demostradas a partir de las 9 propiedades de los reales.

$$\begin{cases}
 -(-a) = a \\
 (-a)b = -(ab) = a(-b) \\
 (-a)(-b) = ab \\
 (-1)a = -a
 \end{cases}$$

Vamos a definir la **resta** como: $a - b = a + (-b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$, la suma de un número negativo. La **división** se define como: $a \div b = a(1/b) = (a/b)$. Comúnmente en los libros

suele manejarse como:

$$(1/b) = b^{-1} \Rightarrow a \div b = (a/b) = ab^{-1}.$$

Recordemos que $\frac{a}{b} = \frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$, ya vimos que (a/b) sólo está definido si $b \neq 0$.

1.1.4. Suma y Multiplicación de Fracciones

1. Multiplicación de fracciones

$$\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{d}\right) = (a) \left(\frac{1}{b}\right) (c) \left(\frac{1}{d}\right) = ac \underbrace{\left(\frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{d}\right)}_{\left(\frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{d}\right) = \frac{1}{bd}} = \left(\frac{ac}{bd}\right)$$

2. Suma de fracciones con el mismo denominador

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

A partir de las de las propiedades anteriores (1) y (2) obtenemos la siguiente propiedad.

3. Suma de fracciones con diferente denominador

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Demostración

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = (1)\frac{a}{b} + (1)\frac{c}{d} = \left(\frac{d}{d}\right) \left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{b}{b}\right) \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{da}{db} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

4. Cancelación en fracciones

Tenemos que

$$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$$

Demostración

$$\frac{ad}{bd} = ad(1/b)(1/d) = a(1/b)d(1/d) = \frac{a}{b}$$

5. ¡Ley del Sandwich!

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$$

Demostración

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left(\frac{a/b}{c/d} \right) (1) = \left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \right) \left(\frac{\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}} \right) = \frac{ad/bc}{cd/dc} = \frac{ad/bc}{1} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplos:

$$5 \div 2/3 = \frac{5}{2/3} = \frac{5/1}{2/3} = 15/2$$

$$1/3 \div 3/5 = \frac{1/3}{3/5} = 5/9$$

Ejercicios

1. Diga cuál propiedad se ha usado en los siguientes enunciados:

a) $4 + 5 = 5 + 4$

b) $0 + 8 = 8$

c) $(-xy) + xy = 0$

d) $\frac{1}{x+2y}(x+2y) = 1$

e) $x + y = 1(x) + 1(y)$

2. Encuentre el inverso aditivo y multiplicativo de los siguientes números:

a) $\frac{2x}{5y}$

b) $-\frac{3a}{2b}$

c) $-\frac{5}{c}$

d) $(3x + z)$

3. Resuelva lo siguiente:

a) Suponiendo que $d \neq 0$, dé el valor de x si:

1) $dx = d$

2) $d + x = d$

3) $\frac{1}{d}(x) = 1$

b) Muestre que los siguientes enunciados son ciertos:

1) $(b + 7) + z = 7 + (z + b)$

$$2) (b + c + d)a = ab + ac + ad$$

$$3) -a + (b + a) = b$$

4. Demuestre que $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a(b - c) = ab - ac$, y en cada paso anote la propiedad o definición que se usó.

1.1.5. Exponentes y Radicales

Definición (exponentes):

$$\text{Sea } a \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{N} \Rightarrow a^n = \underbrace{a * \cdots * a}_{n\text{-veces}}$$

Observación 2. Con la definición anterior, tenemos que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ con $a \neq 0$.

Propiedades de los exponentes:

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = (a^{1/n})^m$
4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. Si $b \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
6. Si $a \neq 0 \Rightarrow \frac{a^n}{a^m} = \begin{cases} a^{n-m} & \text{si } n > m \\ \frac{1}{a^{m-n}} & \text{si } m > n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$

Definición:

$$\text{Si } a \in \mathbb{R} \Rightarrow a^0 = 1$$

Todas las propiedades anteriores pueden demostrarse partiendo de la definición, en este caso sólo demostraremos la propiedad (6):

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \begin{cases} a^{n-m} & \text{si } n - m > 0 \\ \frac{1}{a^{m-n}} & \text{si } 0 > n - m \Rightarrow m - n > 0 \\ a^0 = 1 & \text{si } n = m \Rightarrow m - n = 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$$\blacksquare (3X^3Y^4)(4XY^5) = 12X^4Y^9$$

$$\blacksquare \left(\frac{2X^3}{Y}\right)^2 \left(\frac{Y}{X^3}\right)^3 = \frac{4X^6}{Y^2} \frac{Y^3}{X^9} = \frac{4Y}{X^3}$$

$$\blacksquare \frac{8X^3Y^{-5}}{4X^{-1}Y^3} = \frac{2X^4}{Y^8}$$

$$\blacksquare \frac{X^{-2} + Y^{-2}}{(XY)^{-1}} = \frac{\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2}}{\frac{1}{XY}} = \frac{\frac{Y^2 + X^2}{(XY)^2}}{\frac{1}{XY}} = \frac{XY(Y^2 + X^2)}{(XY)^2} = \frac{Y^2 + X^2}{XY}$$

$$\blacksquare \left(\frac{(2X^{n+1})^2}{X^{2(n+1)}}\right) \left(\frac{X^{3-n}}{(X^n)^2}\right) = \left(\frac{4X^{2n+2}}{X^{2n+2}}\right) \left(\frac{X^{3-n}}{X^{2n}}\right) = \frac{4}{X^{2n-3+n}} = \frac{4}{X^{3n-3}}$$

Definición (radicales):

$$1. \text{ Si } a \geq 0, \quad b \geq 0 \quad y \quad n \in \mathbb{N}$$

$$2. \text{ Si } a \leq 0, \quad b \leq 0 \quad y \quad n = \text{impar}, n \in \{1, 3, 5, \dots\}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[n]{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad b^n = a$$

Ejemplos:

$$\blacksquare \sqrt[5]{1/32} = ? \text{, se necesita un número } x \text{ tal que } x^5 = 1/32$$

$$(1/2)^5 = (1/2)(1/2)(1/2)(1/2)(1/2) = 1/32 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[5]{1/32} = 1/2$$

$$\blacksquare \sqrt[4]{81} = ? \text{, se necesita un número } x \text{ tal que } x^4 = 81$$

$$3^4 = 3 * 3 * 3 * 3 = 81 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[4]{81} = 3$$

$$\blacksquare \sqrt[3]{-8} = ? \text{, se necesita un número } x \text{ tal que } x^3 = -8$$

$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$\blacksquare \sqrt{16} = 4 \text{ pues } 4^2 = 16$$

Definición:

Si $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ siempre y cuando $\sqrt[n]{a}$ exista.

Definición:

Si $\sqrt[n]{a}$ existe $\Rightarrow a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Nota: $\sqrt[n]{a^n} = a$ si $a \geq 0$ o si $a \leq 0$ y si n es impar.

Observación: $\sqrt{a^2} = |a|$, más adelante se tratará con mayor detalle.

Ejemplos: Reducir en su forma más simple (todas las letras satisfacen las condiciones necesarias para que exista la raíz):

- $\sqrt{a^2(a+b)^3}\sqrt{a+b} = \sqrt{a^2}\sqrt{(a+b)^3}\sqrt{a+b}$
 $= |a| (a+b)^{3/2}(a+b)^{1/2}$
 $= |a|(a+b)^2$
 $= a(a+b)^2$
- $\sqrt{\frac{X^2Y^4}{X^6Y}} = \left(\frac{X^2Y^4}{X^6Y}\right)^{1/2} = \frac{(X^2Y^4)^{1/2}}{(X^6Y)^{1/2}} = \frac{XY^2}{X^3Y^{1/2}} = \frac{Y^{4/2-1/2}}{X^2} = \frac{Y^{3/2}}{X^2} = \frac{\sqrt{Y^3}}{X^2}$
- $\sqrt{\frac{27a^8b}{c^3d^4}} = \frac{\sqrt{27}a^4b^{1/2}}{c^{3/2}d^2} = \frac{\sqrt{3^2}3a^4\sqrt{b}}{\sqrt{c^2}cd^2} = \frac{3a^4\sqrt{3b}}{cd^2\sqrt{c}}$
- $\sqrt[4]{8u^2v^3}\sqrt[4]{4u^3v^2} = \sqrt[4]{(8u^2v^3)(4u^3v^2)} = \sqrt[4]{32u^5v^5} = \sqrt[4]{2^4 2u^4uv^4v} = 2uv\sqrt[4]{2uv}$
- $\sqrt[3]{\sqrt{X^6Y^9}} = ((X^2X^2X^2Y^2Y^2Y^2Y^2Y)^{1/2})^{1/3}$
 $= (X^3Y^3YY^{1/2})^{1/3}$
 $= XYY^{1/3}Y^{1/6}$
 $= XYY^{2/6}Y^{1/6}$
 $= XYY^{3/6}$
 $= XYY^{1/2}$
 $= XY\sqrt{Y}$
- $\frac{1}{\sqrt{X^3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{X^3}}\right) \left(\frac{\sqrt{X^3}}{\sqrt{X^3}}\right) = \frac{\sqrt{X^3}}{X^3} = \frac{X\sqrt{X}}{X^3} = \frac{\sqrt{X}}{X^2}$

- $\frac{1}{\sqrt{X+1}} = \frac{\sqrt{X+1}}{X+1}$
- $\frac{1}{a+\sqrt{b}} = \frac{a-\sqrt{b}}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})} = \frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}$
- $\frac{\sqrt{X}}{\sqrt{X}+1} = \frac{\sqrt{X}(\sqrt{X}-1)}{(\sqrt{X}+1)(\sqrt{X}-1)} = \frac{X-\sqrt{X}}{X-1}$
- $\sqrt{(X-Y)^2} = |X-Y|$

Ejercicios

- Exponentes. Simplifica cada expresión realizando las operaciones correspondientes y dejando el resultado sin exponentes negativos o nulos.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
 \bullet (a^5b^{-3})(a^{-2}b^3) &= (a^5a^{-2})(b^{-3}b^3) \\
 &= a^{5-2}b^{-3+3} \\
 &= a^3b^0 \\
 &= a^3(1) \quad (x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}) \\
 &= a^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \frac{1}{x^{-2}+y^{-2}} &= \frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}} \\
 &= \frac{1}{\frac{y^2+x^2}{x^2y^2}} \\
 &= \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}
 \end{aligned}$$

Ejercicios:

1. $(3xy^3)(3xy)^{-2}$
2. $(z^3w^{-2})^{-1}(z^2w^0)^2$
3. $(ab^{-3})(a^{-1}b^{-1})^{-1}$
4. $\frac{2^{-1}+3^{-1}}{2^{-1}}$
5. $\left(\frac{7x^3}{3yz}\right)^2 \left(\frac{z}{7x^2}\right)^2$
6. $\left(\frac{p^3q^0}{r^2}\right)^{-1}$

$$7. \frac{2^{-1} + 1^{-1}}{2^{-1} - 1^{-1}}$$

■ Radicales. Ejercicios:

$$1. \sqrt[2]{49x^2y^4}$$

$$2. \sqrt[3]{-\frac{3}{4}}$$

$$3. \sqrt[3]{64x^4y^5}$$

$$4. \sqrt{\frac{2}{3x^3}}$$

$$5. \sqrt[6]{81x^8y^4}$$

$$6. \sqrt[4]{\frac{25x^2}{y^2}}$$

$$7. \sqrt[4]{\frac{x^2 + 4x + 4}{4x^2}}$$

Opcionales:

- Si $2^a = 10$ y $5^b = 10$. ¿Cuánto vale $\frac{1}{a} \frac{1}{b}$?

- Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, es decir, $x, y, z > 0$ si $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y}$ ¿cuánto vale $\frac{x}{y}$?

Ayuda: si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \forall a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

1.2. Expresiones Algebraicas

Expresiones Algebraicas: Es una combinación de números y letras que representan números cualesquiera.

Por ejemplo, $3x^2 - 5xy + 2y^4$, $2a^3b^5$, $\frac{5xyz + 7w}{4db + \sqrt[5]{3z^8w}}$ son expresiones algebraicas.

Monomio: Es una expresión algebraica de un sólo término.

Por ejemplo, $8yz^4$, $5zxy$, $5x^7/ax$.

Binomio: Es una expresión algebraica de dos términos.

Por ejemplo, $5ab + 3x^2y$, $ab/c - dc$.

Trinomio: Es una expresión algebraica de tres términos.

Por ejemplo, $ax^2 + bx + c$, $xy^2 + \frac{xyz}{wz^2} - wz$.

Multinomio: Es una expresión algebraica de más de un término.

Por ejemplo, $7x + y$, $5x^2y^2 + \sqrt{xz} - w^3z^5 + \frac{wz}{x} + 35yx - 12$.

Coeficiente: Cualquier factor de un término se llama coeficiente del resto de dicho término.

Por ejemplo, en el término $2z^2x$, $2z^2$ es el coeficiente de x , pero también puede ser 2 el coeficiente de z^2x .

Coeficiente numérico: Si un término es el producto de un número por una o varias letras, entonces dicho número es el coeficiente numérico de dicho término.

Por ejemplo, $7x^2yz^3$, 7 es el coeficiente numérico de x^2yz^3 .

Términos semejantes: Son todos aquellos términos iguales o que sólo se diferencian por su coeficiente numérico.

Por ejemplo, $5xy$ es semejante a $-15xy$, w^3z es semejante a $2w^3z$, pero $-7a^2b^5$ no es semejante a $4a^3b^5$.

Polinomio: Son expresiones del tipo $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales, y son los coeficientes del polinomio. Al símbolo x se le llama indeterminada. $a_0, a_1x, a_2x^2, \dots, a_nx^n$ son los términos del polinomio.

Por ejemplo, $2x$, $\sqrt{3}z^2y$, $2a^2b^3 + \sqrt{5}xw + 7y^5 - xyz$, sin embargo $6x^2 - \frac{ab}{x}$, $7\sqrt{xy} + 2z$ no son polinomios.

Ejercicios

Calcular las siguientes expresiones siendo:

$$x = -1, y = 3, z = 2, a = 1/2, b = -2/3$$

1. $4x^3y^2 - 3xyz^2$
2. $(x - y)(y - z)(z - x)$
3. $\frac{xy^2 - 3z}{a + b}$
4. $\frac{(x - y)^2 + 2z}{ax + by}$
5. $\frac{(x - 1)(y - 1)(z - 1)}{(a - 1)(b - 1)}$

1.2.1. Productos Notables

Productos de interés práctico: Las fórmulas que a continuación se exponen son el resultado de los productos que con mayor frecuencia se presentan en el cálculo algebraico y con los que el alumno debe de familiarizarse. Su comprobación se realiza efectuando las multiplicaciones correspondientes.

1. $a(c + d) = ac + ad$
2. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
3. $(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
4. $(a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
5. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
6. $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$
7. $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$

Otros productos que se usan muy comúnmente son:

8. $(a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
9. $(a - b)(a - b)(a - b) = (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
10. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
11. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

$$12. (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Existe otro producto de mucho interés, el famoso **Teorema del Binomio de Newton** $(a + x)^n$, el cual lo expresaremos después de la siguiente definición.

Definición (factorial):

Definimos como el **factorial** de un número $n \in \mathbb{N}$, $(n!)$, como el producto de todos los números anteriores e iguales a él.

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

Se define a el factorial de cero como: $0! = 1$

Teorema del Binomio de Newton: Desarrollo de $(a + x)^n$.

- Para valores de n enteros positivos:

$$\begin{aligned} (a + x)^n = & a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 \\ & + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1} + \cdots + x^n \end{aligned}$$

Este desarrollo constituye la fórmula, o el teorema del Binomio de Newton.

- Para valores de n negativos y fraccionarios, el teorema del binomio es válido siempre que el binomio sea de la forma $(a + x)^n$, siendo $|x|$ menor a . No obstante, cuando n es un número negativo o fraccionario el desarrollo es limitado.

Ejercicios

Efectuar los productos siguientes e indicar el número de fórmula o propiedad que se está utilizando:

1. $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1) =$
2. $(3y + x)(81y^2 - 27y^3x + 9y^2x^2 - 3yx^3 + x^4) =$

$$3. (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c) =$$

$$4. (9a + b)(a - 2b) =$$

$$5. (2w + 3u)^3 =$$

$$6. (x^2 - y^3 + 3c)^2 =$$

$$7. (e^y + 1)(e^y - 1) =$$

1.2.2. Factorización

La **factorización** es la descomposición o agrupamiento de expresiones algebraicas en uno o más factores. Veamos los siguientes tipos de factorización.

Tipo 1: *Factores comunes.* Si cada polinomio tiene un término en común, la ley distributiva nos permite expresar al polinomio como el producto de dos factores, uno de los cuales es un factor común.

Por ejemplo:

- $6x^3z^2 + 3x^2z^3 - 9x^2z^2 = 3x^2z^2(2x + z - 3)$
- $x(a + b) + y(a + b) = (x + y)(a + b)$

Tipo 2: *Diferencia de cuadrados.* Reescribiendo la fórmula del siguiente producto notable, encontramos otra fórmula de factorización.

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Por ejemplo:

- $4a^2 - 9b^2 = (2a + 3b)(2a - 3b)$
- $4ax^2 - 16ay^2 = 4a(x^2 - 4y^2) = 4a(x + 2y)(x - 2y)$

Como ilustra este ejemplo, el primer paso en la factorización es el retiro del factor común, si existe.

- $(a + b)^2 - (c - 2d)^2 = (a + b + c - 2d)(a + b - c + 2d)$

Tipo 3: *Trinomio cuadrado perfecto.* Nos proporciona una forma más de factorización.

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

Ejemplo:

- $25x^2 + 30x + 9 = (5x)^2 + 2(5x)(3) + 3^2 = (5x + 3)^2$
- $9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x)^2 - 2(3x)(2y) + (2y)^2 = (3x - 2y)^2$

Tipo 4: Suma y la diferencia de dos cubos.

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Ejemplo:

- $27x^3 + 64y^3 = (3x)^3 + (4y)^3 = (3x + 4y)(9x^2 - 12xy + 16y^2)$
- $2x^4y - 54xy^4 = 2xy(x^3 - 27y^3) = 2xy(x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)$

Consideremos ahora el caso de trinomios factorizables que no son cuadrados perfectos, *el trinomio general de segundo grado*

$$acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2 = (ax + by)(cx + dy),$$

para factorizar un trinomio de este tipo, se necesita encontrar valores racionales para a, b, c y d a partir de los valores conocidos ac , $ad+bc$ y bd , decimos que el trinomio es factorizable.

Ejemplo 1. Factoricemos el polinomio $x^2 - 5x + 6$

Solución. Si se usa x como primer término de cada factor, el producto contendrá a x^2 . El producto de los otros términos debe ser 6. Este valor es el producto de 1 y 6, de -1 y -6, de 2 y 3, y de -2 y -3. Observando el término intermedio del trinomio dado, vemos que los números cuyo producto es 6 debe tener suma -5, tan sólo la pareja -2 y -3 tiene esta suma. Por tanto,

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Ejemplo 2. Factoricemos la expresión $8x^2 - 2xy - 15y^2$

Solución. Para los primeros términos de los factores, la pareja x y $8x$ y la pareja $2x$ y $4x$ son las únicas posibilidades con coeficientes positivos. Entonces, los segundos términos deben tener $-15y^2$, como su producto. Las elecciones para este producto son y y $-15y$, $-y$ y $15y$, $3y$ y $-5y$, y $-3y$ y $5y$. Pero la suma de los productos cruzados (el primer término de cada factor veces el segundo término del otro) deben dar $-2xy$, probando las varias combinaciones puede determinarse que $2x - 3y$ y $4x + 5y$ son los factores. Por tanto,

$$8x^2 - 2xy - 15y^2 = (2x - 3y)(4x + 5y)$$

Factorización por Agrupamiento

Existen casos en los cuales las expresiones algebraicas cuyos términos no contienen algún factor en común pueden ser separadas en grupos de términos con factor común. Y algunas expresiones algebraicas que no están en la forma de diferencia de cuadrados pueden ser expresados así mediante un agrupamiento adecuado de los términos.

Ejemplo 1.

$$\begin{aligned} 3x + 3y + ax + ay &= (3x + 3y) + (ax + ay) \\ &= 3(x + y) + a(x + y) \\ &= (3 + a)(x + y) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 2x + 2y &= (x^2 - y^2) + (-2x + 2y) \\ &= (x + y)(x - y) - 2(x - y) \\ &= (x + y - 2)(x - y) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.

$$\begin{aligned} 4 - x^2 + 2xy - y^2 &= 4 - (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= (2)^2 - (x - y)^2 \\ &= (2 + (x - y))(2 - (x - y)) \\ &= (2 + x - y)(2 - x + y) \end{aligned}$$

Ejemplo 4. Factoricemos $x^4 - 13x^2 + 4$

Solución. El trinomio dado sería un cuadrado perfecto si el término intermedio fuese $-4x^2$. Obtenemos el cuadrado perfecto sumando $9x^2$. Pero si sumamos $9x^2$, debemos restar $9x^2$. Por tanto tenemos:

$$\begin{aligned} x^4 - 13x^2 + 4 &= (x^4 - 13x^2 + 4 + 9x^2) - (9x^2) \\ &= (x^4 - 4x^2 + 4) - (3x)^2 \\ &= (x^2 - 2)^2 - (3x)^2 \\ &= ((x^2 - 2) + 3x)((x^2 - 2) - 3x) \\ &= (x^2 - 2 + 3x)(x^2 - 2 - 3x) \end{aligned}$$

Hay que notar que el hecho de sumar y restar un término (es decir, matemáticamente es sumar un cero adecuado; esto es muy utilizado en las demostraciones matemáticas) facilita los problemas.

Ejercicios

Descomponer en factores indicando que tipo de factorización es o el nombre de la fórmula que se está utilizando:

1. $3a^2y^2 + 6a^3b^3 =$
2. $(4a + b)^2 - (2b - c)^2 =$
3. $5w^3 - 3w^2 - 2w =$
4. $z^3 + 27 =$
5. $8z^6 + 7z^3 - 1 =$
6. $(u^2 - v^2)^2 + 8(u^2 - v^2) + 16 =$
7. $a^{2n+4} + 5a^{n+4} - 50a^4 =$

1.2.3. Ecuaciones

$$1. -3x + 4 = -1 \Rightarrow -3x + 4 + (-4) = -1 + (-4) \Rightarrow -3x = -5$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5}{-3} \Rightarrow x = 5/3$$

$$2. 5x - 4 = 2(x - 2) \Rightarrow 5x - 4 = 2x - 4 \Rightarrow$$

$$5x - 4 + (-2x + 4) = 2x - 4 + (-2x + 4) \Rightarrow 5x - 2x = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$3. \frac{1}{5}x + 2 = 3 - \frac{2}{7}x \Rightarrow \frac{2}{7}x + \frac{1}{5}x = 3 - 2 \Rightarrow \left(\frac{2}{7} + \frac{1}{5}\right)x = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{10}{35} + \frac{7}{35}\right)x = 1 \Rightarrow \frac{17}{35}x = 1 \Rightarrow x = 1 \left(\frac{35}{17}\right) \Rightarrow x = \frac{35}{17}$$

$$4. \frac{3 + 5x}{5} = \frac{4 - x}{7} \Rightarrow 7(3 + 5x) = 5(4 - x) \Rightarrow 21 + 35x = 20 - 5x$$

$$\Rightarrow 35x + 5x = 20 - 21 \Rightarrow 40x = -1 \Rightarrow x = -1/40$$

$$5. (5x - 7)(2x + 1) - 10x(x - 4) = 0 \Rightarrow 10x^2 + 5x - 14x - 7 - 10x^2 + 40x = 0$$

$$\Rightarrow 31x - 7 = 0 \Rightarrow 31x = 7 \Rightarrow x = 7/31$$

$$6. \frac{3x+1}{6x-2} = \frac{2x+5}{4x-13} \Rightarrow (4x-13)(3x+1) = (6x-2)(2x+5)$$

$$12x^2 + 4x - 39x - 13 = 12x^2 + 30x - 4x - 10 \Rightarrow -39x + 4x - 30x + 4x = 13 - 10$$

$$-61x = 3 \Rightarrow x = -3/61$$

$$7. \frac{1}{x+4} + \frac{3}{x-4} = \frac{3x+8}{x^2-16} \Rightarrow \frac{1(x-4) + 3(x+4)}{(x+4)(x-4)} = \frac{3x+8}{(x+4)(x-4)}$$

$$\frac{x-4+3x+12}{(x+4)(x-4)} = \frac{3x+8}{(x+4)(x-4)} \Rightarrow \frac{4x+8}{(x+4)(x-4)} = \frac{3x+8}{(x+4)(x-4)}$$

$$\frac{4x+8}{3x+8} = \frac{(x+4)(x-4)}{(x+4)(x-4)} \Rightarrow \frac{4x+8}{3x+8} = 1 \Rightarrow 4x+8 = 3x+8$$

$$4x - 3x = 8 - 8 \Rightarrow x = 0$$

¿Para qué valor de c el número a es una solución en las siguientes ecuaciones?

■ $4x + 1 + 2c = 5c - 3x + 6$ con $a = -2$

$$4x + 1 + 2c = 5c - 3x + 6 \Rightarrow 4x + 3x + 2c - 5c = 6 - 1 \Rightarrow 7x - 3c = 5$$

Como queremos que $a = -2$ sea una solución de la ecuación (i) entonces sea $x = a = -2$

$$7(-2) - 3c = 5 \Rightarrow -14 - 3c = 5 \Rightarrow -3c = 5 + 14 \text{ por lo tanto } c = -\frac{19}{3}$$

es la solución buscada.

Comprobación: basta que comencemos en la ecuación $7x - 3c = 5$

$$7x - 3\left(-\frac{19}{3}\right) = 5 \Rightarrow 7x + 19 = 5 \Rightarrow x = \frac{5-19}{7} \Rightarrow x = -2$$

■ $3x - 2 + 6c = 2c - 5x + 1$ con $a = 4$

$$3x - 2 + 6c = 2c - 5x + 1 \Rightarrow 3x + 5x + 6c - 2c = 1 + 2 \Rightarrow 8x + 4c = 3$$

como queremos que $a = 4$ sea solución de la ecuación (ii) entonces sea $x = a = 4$

$$8(4) + 4c = 3 \Rightarrow 32 + 4c = 3 \Rightarrow c = \frac{3-32}{4} \text{ por lo tanto } c = -\frac{29}{4}$$

Comprobación: basta que comencemos en la ecuación $8x + 4c = 3$

$$8x + 4\left(-\frac{29}{4}\right) = 3 \Rightarrow 8x - 29 = 3 \Rightarrow x = \frac{3+29}{8} \Rightarrow x = 4$$

Veamos unos ejemplos en los cuáles la ecuación no es equivalente a la ecuación que le precede:

- $x^2 - x - 2 = x^2 - 4 \Rightarrow x - 2 = 0$ observemos por qué:

$$x^2 - x - 2 = x^2 - 4 \Rightarrow (x+1)(x-2) = (x+2)(x-2) \Rightarrow x+1 = x+2 \Rightarrow 1 = 2$$

pues para que se cumpla la igualdad $x - 2 = 0$

- $5x + 6 = 4x + 3 \Rightarrow x + 3 = 0$ observemos por qué:

$$5x+6 = 4x+3 \Rightarrow x^2+5x+6 = x^2+4x+3 \Rightarrow (x+2)(x+3) = (x+1)(x+3) \Rightarrow x+2 = x+1 \Rightarrow 2 = 1$$

pues para que se cumpla la igualdad $x + 3 = 0$

Ecuaciones cuadráticas

Definición (ecuación cuadrática):

La ecuación escrita de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ es una **ecuación cuadrática** en un conjunto **X**.

$$1. \quad x^2 + 16 = 8x \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \text{ (recordemos que } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{)} \Leftrightarrow (x-4)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x-4 = 0 \text{ ó } x-4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

$$2. \quad x^2 + 6x + 9 = 5 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 5 \Leftrightarrow (x+3) = \pm\sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$x+3 = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \sqrt{5} - 3$$

ó

$$x+3 = -\sqrt{5} \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} - 3$$

$$3. \quad x^2 + 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 14 = (x+7)(x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x+7 = 0 \Leftrightarrow x = -7$$

ó

$$x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$4. \quad x^2 - 5x + 3 = 0 \text{ buscamos que}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 3 &= (x+a)(x+b) \\ &= x^2 + (a+b)x + ab \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a + b = -5 \text{ y } ab = 3$$

Pero resolver este tipo de situaciones resulta muy enredado. Para solucionar usamos un procedimiento que se conoce como complementar el trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x = -3$$

$$\text{recordemos que } (x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2 \Rightarrow 2a = -5 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{25}{4}$$

para lo cual obtenemos que $x^2 - 5x = -3 \Leftrightarrow$

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{4} = \frac{25 - 12}{4} \Leftrightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{4} = \frac{13}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

$$\text{ya que tenemos } \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right) = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$x - 5/2 = \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

ó

$$x - 5/2 = -\frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$$

Completar el Cuadrado

Determinar los valores de d que completen el cuadrado.

$$1. \ x^2 + 9x + d$$

$$\begin{aligned} \text{si } x^2 + 9x + d &= x^2 + 2ax + a^2 \\ \Rightarrow 2a &= 9 \Rightarrow a = \frac{9}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{81}{4} \end{aligned}$$

Recordemos que un polinomio es igual a otro polinomio si el coeficiente de cada término de la variable es igual.

$$\Rightarrow d = a^2 = \frac{81}{4} \text{ por lo que tenemos que } x^2 + 9x + \frac{81}{4} = \left(x + \frac{9}{2}\right)^2$$

$$2. \ x^2 - 8x + d$$

$$\Rightarrow 2a = -8 \Rightarrow a = -\frac{8}{2} = -4 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow d = a^2 = 16$$

por lo tanto tenemos que $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$

3. $x^2 + dx + 36$

si $x^2 + dx + 36 = x^2 + 2ax + a^2 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6$ y $d = 2a \Rightarrow d = 2(\pm 6) = \pm 12$

Para el signo $-$ tenemos $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$

Para el signo $+$ tenemos $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$

Si se quiere deducir la fórmula general para resolver $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ entonces

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + d = -\frac{c}{a} + d$$

igualando con un trinomio cuadrado perfecto $x^2 + \frac{b}{a}x + d = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 \Rightarrow 2\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow$

$$\alpha = \frac{b}{2a} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{b^2}{4a^2} \Rightarrow 2\alpha = \frac{b}{a} \text{ y } d = \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{por lo tanto } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejercicios

Resuelve los siguientes ejercicios.

1. $2x + \frac{3}{2} = 7\left(x - \frac{5}{3}\right) + 1$

2. ¿Para qué valor de d el número a es una solución en las siguientes ecuaciones?

■ $6x + 3d = 2d + x + 12$ si $a = 3$

■ $3d + x = x + d + 23$

3. $x^2 - x - 6 = 3$

4. $x^2 + 5x + 14 = 8$

5. $x^3 - 22 = 0$

1.2.4. Desigualdades

Ya se mencionaron los 9 axiomas fundamentales de los $\mathbb{R}$, en esta sección es importante enunciar otros dos:

- Si $a > 0$ y $b > 0 \Rightarrow a + b > 0 \forall a, b \in \mathbb{R}$
- Si $a > 0$ y $b > 0 \Rightarrow ab > 0 \forall a, b \in \mathbb{R}$

Estos axiomas son complementados con la definición siguiente:

Definición:

$$a > b \iff a - b > 0 \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Con esto, podemos probar la siguientes proposiciones:

Proposición i: sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que si $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

Demostración $a > b \underbrace{\iff}_{def} a - b > 0$

$$\iff a - b + 0 > 0 \iff a - b + c - c > 0$$

$$\iff a + c - (b + c) > 0 \underbrace{\iff}_{def} a + c > b + c$$

Proposición ii: sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que si $a > b$ y $b > c \Rightarrow a > c$

Demostración $a > b$ y $b > c \Rightarrow a - b > 0$ y $b - c > 0$

$$\Rightarrow (a - b) + (b - c) > 0 \Rightarrow a - c > 0 \Rightarrow a > c$$

Proposición iii: sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que si $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow ac > bc$

Demostración $a > b \Rightarrow a - b > 0$ y $c > 0$

$$\Rightarrow c(a - b) > 0 \Rightarrow ca - cb > 0 \Rightarrow ca > cb$$

Proposición iv: sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que si $a > b$ y $c < 0 \Rightarrow ac < bc$

Demostración $a > b \Rightarrow a - b > 0$ y $c < 0 \Rightarrow 0 > c \Rightarrow 0 - c > 0$

$$\Rightarrow -c(a - b) > 0 \Rightarrow a(-c) - b(-c) > 0 \Rightarrow -ac + bc > 0 \Rightarrow bc - ac > 0 \Rightarrow bc > ac$$

Algunas aplicaciones.

Ejemplos: ¿Para qué x se cumple la desigualdad?

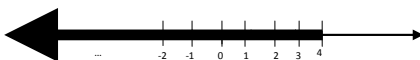
$$\blacksquare -3x + 4 > 11$$

$$-3x + 4 > 11 \Rightarrow -3x > 11 - 4 \Rightarrow -3x > 7 \Rightarrow x < -\frac{7}{3}$$

$$\blacksquare 4x - 3 < 2x + 5 \cdots (1)$$

$$4x - 3 < 2x + 5 \Rightarrow 4x - 2x < 5 + 3 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow x < 4$$

es decir, que $\{x \in \mathbb{R} : x < 4\}$ ó $x \in (-\infty, 4)$



$\Rightarrow$ (1) se vale para -130000 , -15 , -1 , 2 , 3.6 , 3.7 , 3.9 , 3.99 , 3.999 , 3.999999 pero no es válido para 4.

si a (1) lo escribiéramos como $4x - 3 \leq 2x + 5$ la solución sería $x \leq 4$, es decir, $x \in (-\infty, 4]$ para $\leq$ ó $\geq$ es válido todo lo de $<$ ó $>$

Veamos cómo localizar las x 's que son solución en el siguiente ejemplo.

$$-6 < 2x - 4 < 2$$

$$-6 < 2x - 4 < 2 \Rightarrow -6 + 4 < 2x - 4 + 4 < 2 + 4 \Rightarrow -2 < 2x < 6 \Rightarrow -1 < x < 3$$

Por lo tanto las x 's que son solución, son las que cumplen con $x \in (-1, 3)$



$$\text{Si tuviéramos } -6 \leq 2x - 4 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \Rightarrow x \in [-1, 3]$$

Definición (valor absoluto):

$\forall a \in \mathbb{R}$ el **valor absoluto** de a se define como:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

1. $|a| < b \Rightarrow -b < a < b$

Sea $|a| < b \Rightarrow$

Caso 1) si $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \Rightarrow a < b$

Caso 2) si $a < 0 \Rightarrow |a| = -a \Rightarrow -a < b \Rightarrow -b < a$

$$\Rightarrow -b < a < b$$

2. $|a| > b \Rightarrow a > b \text{ ó } a < -b$

Sea $|a| > b \Rightarrow$

Caso 1) si $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \Rightarrow a > b$

Caso 2) si $a < 0 \Rightarrow |a| = -a \Rightarrow -a > b \Rightarrow a < -b$

$$\Rightarrow a > b \text{ ó } a < -b$$

3. $|a| = b \Rightarrow a = b \text{ ó } a = -b$

Sea $|a| = b \Rightarrow$

Caso 1) si $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \Rightarrow a = b$

Caso 2) si $a < 0 \Rightarrow |a| = -a \Rightarrow -a = b \Rightarrow a = -b$

$$\Rightarrow a = b \text{ ó } a = -b$$

Ejemplos:

Encuentra los valores de x que satisfacen los siguientes valores absolutos.

■ $|x - 3| < 1$

$$|x - 3| < 1 \Rightarrow -1 < x - 3 < 1 \Rightarrow -1 + 3 < x - 3 + 3 < 1 + 3 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow x \in (2, 4)$$

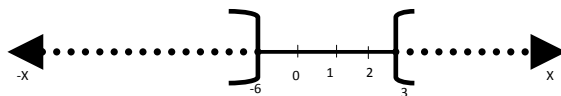
$$\blacksquare |2x + 3| > 9$$

$$|2x + 3| > 9 \Rightarrow 2x + 3 > 9 \text{ ó } 2x + 3 < -9$$

$$x > \frac{9-3}{2} \text{ ó } x < \frac{-9-3}{2}$$

$$x > 3 \text{ ó } x < -6$$

$$x \in (3, \infty) \text{ ó } x \in (-\infty, -6) \Rightarrow x \in (-\infty, -6) \cup (3, \infty)$$



Algunas desigualdades importantes

$$1. |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$2. |a - b| \leq |a| + |b|$$

$$3. |a| - |b| \leq |a - b|$$

Definición:

$$\forall a \in \mathbb{R}, |a| = \sqrt{a^2}$$

Observación: siempre se cumple $a \leq |a| \forall a \in \mathbb{R}$ y además $|a| \geq 0$.

Demostración de $|a + b| \leq |a| + |b|$

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \leq (|a|+|b|)^2$$

$$\sqrt{(a+b)^2} \leq \sqrt{(|a|+|b|)^2}$$

$$|a+b| \leq ||a|+|b|| = |a|+|b| \text{ por lo tanto } |a+b| \leq |a|+|b|$$

La demostración de la propiedad 3 es consecuencia directa de la 1:

$$|x| - |y| \leq |x - y| \Leftrightarrow \underbrace{|x|}_{a+b} \leq \underbrace{|x-y|}_a + \underbrace{|y|}_b$$

Ejercicios

1. Demuestra: $|a-b| \leq |a|+|b|$
¿Para qué valores de x se cumplen las siguientes desigualdades?
2. $3x+32 \leq 2x+3(4-x)$
3. $5x+4 < x < 7+x$
4. $|x+4| = 20$
5. $|6+8x| \geq 31$
6. $x^2+2x+1 \leq 0$. Grafica el resultado.

1.2.5. Sistema de Ecuaciones

Antes de comenzar con el sistema de ecuaciones veamos un poco de la recta en $\mathbb{R}^2$.
 $\mathbb{R}^2$ = plano cartesiano = plano coordenado en dos dimensiones.
 Las parejas (x, y) , por ejemplo las que se muestran en la figura 1.2

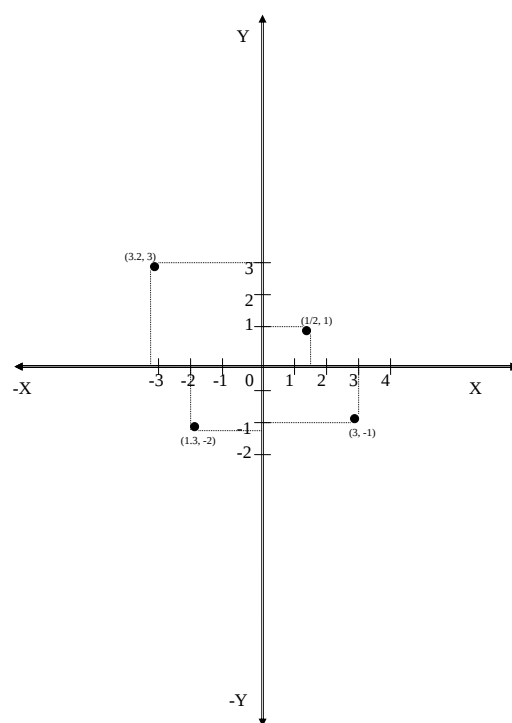
La recta. Para saber que estamos haciendo cuando se resuelve un sistema de ecuaciones, es conveniente revisar lo que es una recta en el plano.

Vamos a trabajar con rectas en el plano cartesiano. Una recta está definida totalmente por 2 puntos en el plano (un punto es una coordenada (x, y) en el plano).

Definición (pendiente de una recta):

Sea ℓ una recta, que **no** es paralela al eje Y, y sean dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) distintos en ℓ . Se define la pendiente de ℓ como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Figura 1.2: Puntos en $\mathbb{R}^2$

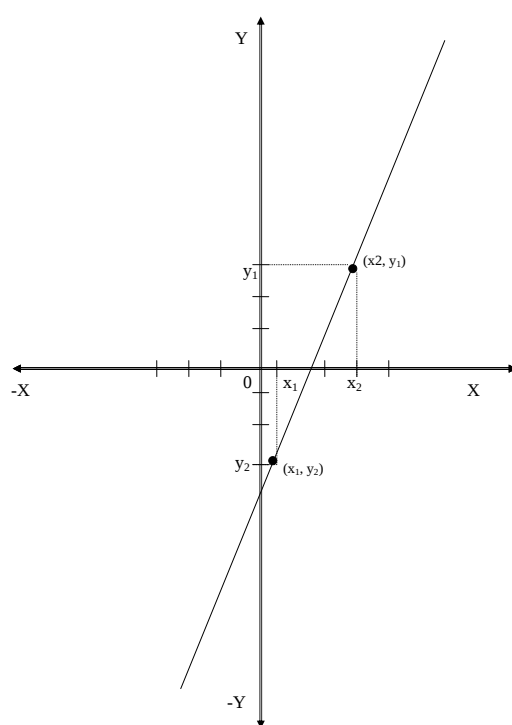


Figura 1.3: La recta

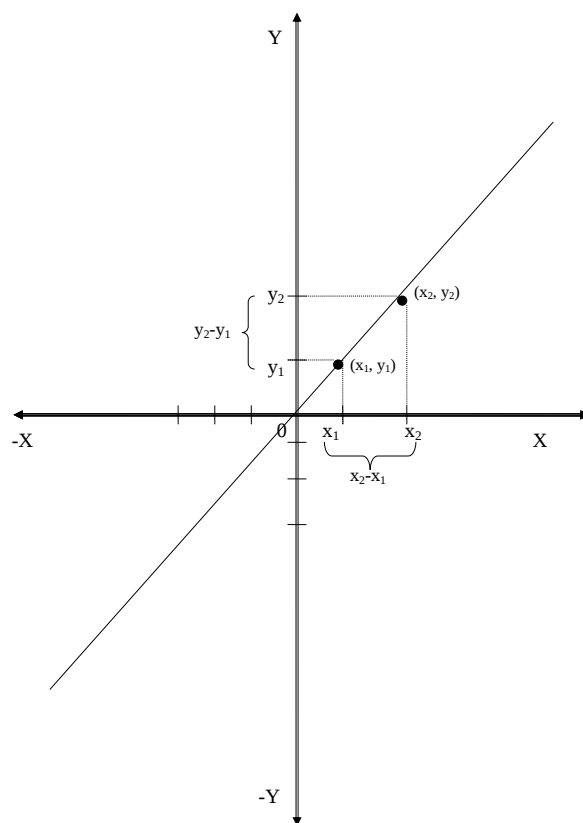


Figura 1.4: La recta pendiente

Si ℓ es paralela al eje Y $\Rightarrow m$ no está definida. (**¿Por qué?**)

Ahora es de interés tener una ecuación que nos determine el comportamiento de una recta en el plano cartesiano (ver figuras 1.3 y 1.4).

Definición (ecuación punto pendiente):

Ecuación de la recta dados un punto y su pendiente. La ecuación de una recta ℓ que pasa por un punto (x_0, y_0) con pendiente m , es:

$$\ell : y - y_0 = m(x - x_0).$$

Con esta ecuación podemos determinar completamente a las parejas (x, y) que están en la recta, dados (x_0, y_0) y m .

Ejemplo: encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(5, 3)$ y $(2, 1)$

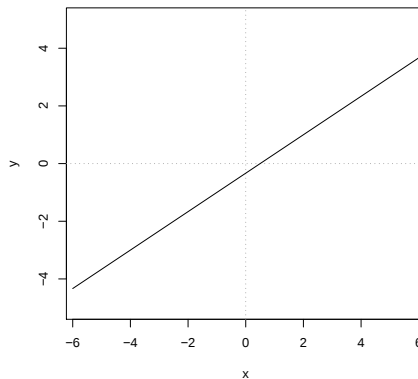
$$m = \frac{1 - 3}{2 - 5} = \frac{-2}{-3} = 2/3$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y - 3 = 2x - 4$$

Por lo tanto la ecuación buscada es $\ell : 2x - 3y = 1$ la cual podríamos reescribir como

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\text{pues } y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + \frac{3}{3}.$$



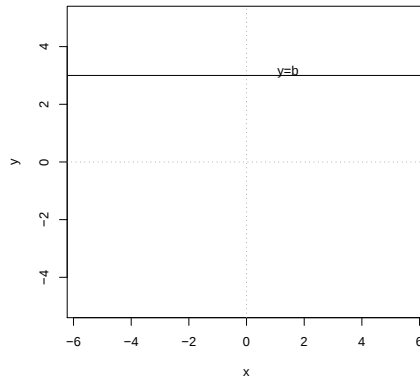
Otra forma de escribir a la recta ℓ es $y = mx + b$ (forma pendiente ordenada al origen).

Observaciones: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es una medida de cambio pues $y_2 - y_1$ es el cambio de y_1 a y_2 y $x_2 - x_1$ es el cambio de x_1 a x_2 . Si $m = 1 \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 1 \Leftrightarrow y_2 - y_1 = x_2 - x_1$ el cambio en x y y es el mismo.

Si $m > 1 \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > 1 \Leftrightarrow y_2 - y_1 > x_2 - x_1$

Si $m < 1 \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 1 \Leftrightarrow y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

Si $m = 0 \Rightarrow$ tengo una recta paralela al eje Y $mx - b = 0$



Ahora veamos los sistemas de ecuaciones.

Un sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}^2$ tiene la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= d_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= d_2 \end{aligned}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$.

Un sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}^3$ tiene la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= d_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= d_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= d_3 \end{aligned}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, 3$.

Generalizando, un sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}^n$ tiene la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= d_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= d_n \end{aligned}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Teorema: Un sistema de ecuaciones se puede reducir en un sistema de ecuaciones más

simple y equivalente, por medio de una serie de operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división). Dado un sistema de ecuaciones lineales, resulta uno equivalente si:

1. Se intercambian renglones.
2. Se multiplica o divide un renglón por una constante diferente de cero.
3. Un múltiplo constante de un renglón se suma a otro renglón.

En símbolos:

1. $R_i \leftrightarrow R_j$ Intercambio de los renglones i por j .
2. $R_i \rightarrow kR_i$ Multiplico al renglón i por k y obtengo un nuevo renglón R_i .
3. $R_j \rightarrow kR_i + R_j$ Sumo k veces el renglón i al renglón j y obtengo nuevo renglón R_j .

Este tipo de operaciones se realizan para poder triangular el sistema de ecuaciones, y de esta forma encontrar la solución de forma más simple.

Símbolo de equivalencia es: $\equiv$

Ejemplo.

$$\begin{aligned} \begin{matrix} 2x & + & 5y & = & 16 \\ 3x & - & 7y & = & 24 \end{matrix} &\equiv \begin{cases} x + \frac{5}{2}y = 8 \\ x - \frac{7}{3}y = 8 \end{cases} \equiv \begin{cases} x + \frac{5}{2}y = 8 \\ -\frac{29}{6}y = 0 \end{cases} \\ &\implies y = 0 \implies x = 8 \end{aligned}$$

Veamos gráficamente lo que estamos haciendo (figura 1.5).

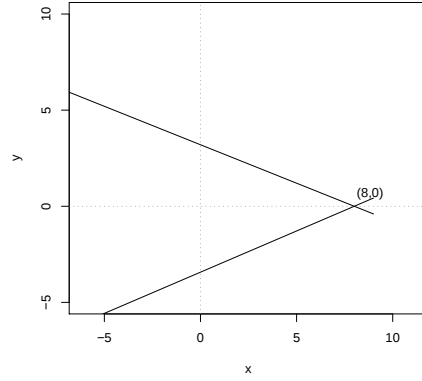
$$\begin{cases} 2x + 5y = 16 \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{16}{5} \dots (i) \\ 3x - 7y = 24 \Rightarrow y = \frac{3}{7}x - \frac{24}{7} \dots (ii) \end{cases}$$

$$\text{De (i) tenemos que } \ell_1 : \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \frac{16}{5} \\ x = 1 \Rightarrow y = \frac{14}{5} \end{cases}$$

$$\text{De (ii) tenemos que } \ell_2 : \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -\frac{24}{7} \\ x = 1 \Rightarrow y = -\frac{21}{7} \end{cases}$$

¿Qué pasa cuando se grafican dos rectas, ℓ_1 y ℓ_2 , en un mismo plano coordenado?

1. Si ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas, no se intersectan.

Figura 1.5: Ejemplo de sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}^2$

2. Si ℓ_1 y ℓ_2 no son paralelas, se intersectan en un único punto.
3. Si ℓ_1 y ℓ_2 son la misma recta, se intersectan en una infinidad de puntos.

Ejemplos.

1.

$$\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{lcl} x - 2y - 3z & = & -1 \\ 2x + y + z & = & 6 \\ x + 3y - 2z & = & 13 \end{array} \right. \dots (i)$$

$$-2R_1 + R_2 = \left\{ \begin{array}{lcl} -2x + 4y + 6z & = & 2 \\ + & & \\ 2x + y + z & = & 6 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} 5y + 7z = 8 \end{array} \right.$$

$$-R_1 + R_3 = \left\{ \begin{array}{lcl} -x + 2y + 3z & = & 1 \\ + & & \\ x + 3y - 2z & = & 13 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} 5y + z = 14 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (i) \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x - 2y - 3z & = & -1 \\ 5y + 7z & = & 8 \\ 5y + z & = & 14 \end{array} \right. \dots (ii)$$

$$-R_2 + R_3 = \left\{ \begin{array}{lcl} -5y - 7z & = & -8 \\ + & & \\ 5y + z & = & 14 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} -6z = 6 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (ii) \equiv \begin{cases} x & -2y - 3z & = & -1 \\ & 5y + 7z & = & 8 \\ & -6z & = & 6 \end{cases} \equiv \begin{cases} x & -2y - 3z & = & -1 \\ & 5y + 7z & = & 8 \\ & z & = & -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{ahora tenemos que } z = -1 &\Rightarrow 5y - 7(1) = 8 \Rightarrow y = \frac{8+7}{5} = 3 \\ \Rightarrow z = -1, y = 3 &\Rightarrow x - 2(3) - 3(1) = -1 \Rightarrow x = 6 - 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

por lo tanto $x = 2, y = 3, z = -1$

Verificamos:

$$\begin{aligned} (2) - 2(3) - 3(-1) &= -1 \\ 2(2) + (3) + (-1) &= 6 \\ (2) + 3(3) - 2(-1) &= 13 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \begin{cases} x + 3y - z & = & -3 \\ 3x - y + 2z & = & 1 \\ 2x - y - z & = & -1 \end{cases} \quad \dots (i)$$

$$-3R_1 + R_2 = \begin{cases} -3x - 9y + 3z & = & 9 \\ + & & \\ 3x - y + 2z & = & 1 \end{cases} = \begin{cases} -10y + 5z & = & 10 \end{cases} \Rightarrow -2y + z = 2$$

$$-2R_1 + R_3 = \begin{cases} -2x - 6y + 2z & = & 6 \\ + & & \\ 2x - y + z & = & -1 \end{cases} = \begin{cases} -7y + 3z & = & 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (i) \equiv \begin{cases} x & +3y - z & = & -3 \\ & -2y + z & = & 2 \\ & -7y + 3z & = & 5 \end{cases} \quad \dots (ii)$$

$$\Rightarrow (ii) \equiv \begin{cases} x & +3y - z & = & -3 \\ & y - \frac{1}{2}z & = & -1 \\ & -y + \frac{3}{7}z & = & \frac{5}{7} \end{cases} \quad \dots (iii)$$

$$R_2 + R_3 = \begin{cases} y - \frac{1}{2}z & = & -1 \\ + & & \\ -y + \frac{3}{7}z & = & \frac{5}{7} \end{cases} = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{7}\right)z & = & -1 + \frac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{10}z = -\frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow (iii) \equiv \begin{cases} x + 3y - z = -3 \\ y - \frac{1}{2}z = -1 \\ \frac{1}{10}z = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

por lo tanto, $z = -\frac{20}{7} \Rightarrow$

$$y - \frac{1}{2}z = -1 \Rightarrow y - \frac{1}{2}\left(-\frac{20}{7}\right) = -1 \Rightarrow y + \frac{10}{7} = -\frac{7}{7} \Rightarrow y = -\frac{17}{7}$$

$$x + 3y - z = -3 \Rightarrow x + 3\left(-\frac{17}{7}\right) - \left(-\frac{20}{7}\right) = -3 \Rightarrow x = \frac{51}{7} - \frac{20}{7} - \frac{21}{7} \Rightarrow x = \frac{10}{7}$$

Por lo tanto, $x = \frac{10}{7}$, $y = -\frac{17}{7}$, $z = -\frac{20}{7}$

Verificamos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{10}{7}\right) + 3\left(-\frac{17}{7}\right) - \left(-\frac{20}{7}\right) &= -3 \\ 3\left(\frac{10}{7}\right) - \left(-\frac{17}{7}\right) + 2\left(-\frac{20}{7}\right) &= 1 \\ 2\left(\frac{10}{7}\right) - \left(-\frac{17}{7}\right) + \left(-\frac{20}{7}\right) &= -1 \end{aligned}$$

Ejercicios

Hay ejercicios que tienen solución única, mientras que otros tienen una infinidad de soluciones y otros simplemente no tienen solución.

1.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ -2x + y &= -3 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} -5x + y &= 5 \\ -5x + y &= -7 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} -12x + 4y &= -16 \\ 9x - 3y &= 12 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} 3x + 5y + 2z &= 3 \\ 2x - 3y + z &= 4 \\ -5x - 6y - 3z &= 5 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{array}{rrrrrr} 4x & + & 3y & + & z & = & -2 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ -8x & - & 6y & - & 2z & = & 4 \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ -5x & - & 5y & - & 5z & = & 1 \\ 8x & + & 8y & + & 8z & = & -8 \end{array}$$

1.2.6. Sumas Σ Definición (sumatoria):

Para $n \in \mathbb{N}$ se define la **suma** (**sumatoria**) como:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Ejemplos:

■

$$\sum_{k=1}^4 k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

■

$$\sum_{k=5}^{10} k^2 = 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2$$

■

$$\sum_{j=1}^5 \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

En estadística es muy usual querer conocer:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ La media o promedio de } n \text{ datos u observaciones.}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{X})^2}{n-1} \text{ La varianza de } n \text{ datos.}$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{X})^2}{n-1}} \text{ La desviación estándar de } n \text{ datos.}$$

Por ejemplo: si tengo 6 alumnos en un curso de estadística y quiero conocer la media de

sus calificaciones, se procede de la siguiente manera:

Alumno	1	2	3	4	5	6
Calf.	9	6	7	8	5	8

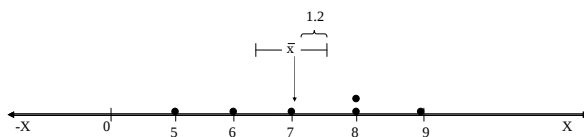
$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{6} = \frac{9+6+7+8+5+8}{6} \Rightarrow \bar{X} = \frac{43}{6} \approx 7$$

$$\frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{X})^2}{6-1} = \frac{(9-7)^2 + (6-7)^2 + (7-7)^2 + (8-7)^2 + (5-7)^2 + (8-7)^2}{6-1}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{X})^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4+1}{5}$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{11}{5} \approx 2 \Rightarrow S = \sqrt{2}$$

Sabemos que:



$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

pero ¿por qué?, veamos la demostración:

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n$$

$$\Rightarrow S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2S &= \begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\ & + & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \end{array} \\ &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n+1 \text{ n-veces}} \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2S = n(n+1) \Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n k_i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Propiedades de las Sumas (Sumatorias)

1. Si c es una constante (c no depende de i) entonces:

$$\sum_{i=1}^n c = nc$$

Demostración:

$$\sum_{i=1}^n ai = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \text{ pero } a_i = c \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n c = \underbrace{c + c + c + \cdots + c + c}_{n\text{-veces}} \Rightarrow \sum_{i=1}^n c = cn$$

2. $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$

Demostración:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) &= a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_n + b_n \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n \\ &= \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \end{aligned}$$

3. $\sum_{i=1}^n c(a_i) = c \sum_{i=1}^n a_i$

Demostración

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c(a_i) &= ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n \\ &= c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &= c \sum_{i=1}^n a_i \end{aligned}$$

- 4.

$$\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i$$

5. $\sum_{i=2}^n (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_1$

Demostración

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n (a_i - a_{i-1}) &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) \\ &+ (a_5 - a_4) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a_n - a_1 \end{aligned}$$

- 6.

$$\sum_{i=n}^m a_i = \sum_{i=n+k}^{m+k} a_{i-k}$$

Sumas Dobles

Una suma doble se define como:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} &= \sum_{i=1}^n (x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + \cdots + x_{im}) \\ &= x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1m} \\ &\quad + x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2m} \\ &\quad + x_{31} + x_{32} + \cdots + x_{3m} \\ &\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ &\quad + x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nm} \end{aligned}$$

Propiedades de las Sumas Dobles

1. Si c es una constante (que no depende de i ni de j)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c = \sum_{i=1}^n cm = cnm$$

- 2.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ij}$$

- 3.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_{ij} + y_{ij}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_{ij}$$

- 4.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_j = n \sum_{j=1}^m x_j$$

Ejercicios

- 1.

La *serie armónica* es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Calcula el valor de la serie armónica para los primeros 7 términos.

2. Una *serie geométrica* es una serie en la cual cada término se obtiene multiplicando el anterior por una constante. Por ejemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^i} + \cdots$$

Calcula en la serie geométrica siguiente los primeros diez términos.

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{5^j}$$

3.

Demuestra que: $\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^j i = \sum_{j=1}^s \frac{j(j+1)}{2}$

Y calcula los primeros cinco términos.

4. Una *serie alternada* es aquella donde los términos alternan el signo. Calcula los ocho primeros términos de la serie alternada.

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Capítulo 2

Cálculo Elemental

2.1. Las Funciones y sus Gráficas

Definición:

Una **función** f de un conjunto D a un conjunto E , es una correspondencia o una regla de asignación, que asigna a cada elemento $x \in D$ un **único** elemento $y \in E$.

Lo anterior lo denotaremos como: $f : D \rightarrow E$, $x \in D$ y $f(x) \in E$. Al conjunto D se le llama **dominio** de f , el cual representa los valores posibles que puede tomar x y al conjunto E se le llama **contradominio** o **rango** de f , el cual representa los valores posibles $f(x) \forall x \in D$. En la Figura 2.1 mostramos un diagrama clásico para representar f .

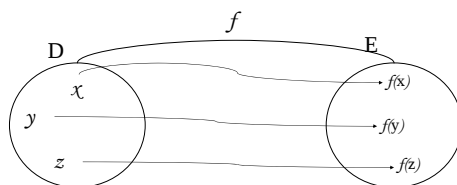


Figura 2.1: Dominio D , contradominio E y función f

Para tener más clara la noción de función, veamos el siguiente ejemplo. Imagínese una biblioteca, en donde claramente a cada libro le corresponde un número de páginas. Entonces hagamos $D = \{\text{los libros en la biblioteca}\}$ y $E = \mathbb{N}$ los números que utilizamos para contar. Entonces, podemos definir f como la regla que cuenta y asigna el número de páginas a cualquier libro dentro del conjunto D .

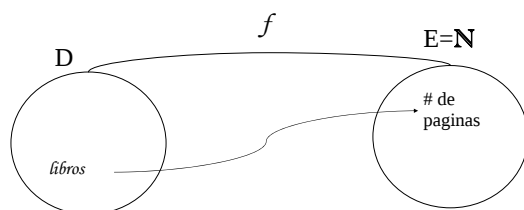


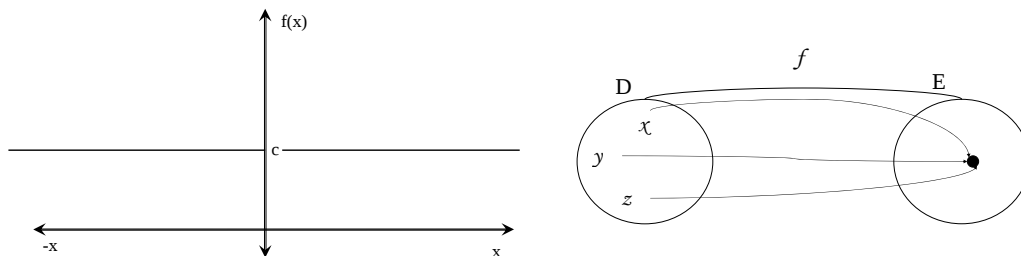
Figura 2.2: Ejemplo de la biblioteca: dominio D , contradominio E y función f

Es claro que varios libros pueden tener el mismo número de páginas, pero un libro no puede tener 2 o más números de páginas distintos, ya que a cada libro le corresponde un único número de páginas. Como en el siguiente caso particular:

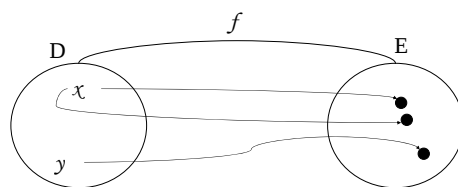
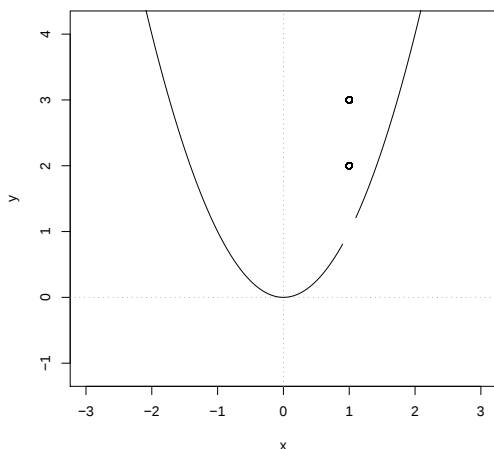
La Divina Comedia $\in D \Rightarrow f(\text{La Divina Comedia}) \in E$

$f(\text{la Divina Comedia}) = 5000 = \text{número de páginas de La Divina Comedia}$.

Se puede tener, por ejemplo: $f(x) = c$, es decir, $(0, c)$, $(1, c)$, $(2, c)$, $(1/2, c)$, $\dots$



Pero no se puede tener: $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 \text{ y } 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



Introducción al Cálculo

- Gráfica la función $f(x) = x$

x	$f(x)$
1	1
0	0
-1	-1

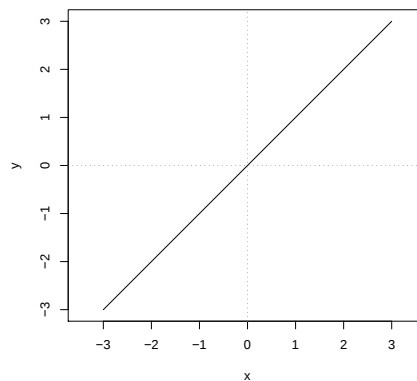
¿Qué valores puede tomar x ?

¿Qué valores toma $f(x)$?

¿Qué con los límites?

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) \rightarrow ?$$

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow ?$$



- Gráfica $f(x) = x^2$

x	$f(x)$
1	1
0	0
-1	1
1/2	1/4
-1/2	1/4
2	4
-2	4

¿Qué valores puede tomar x ?

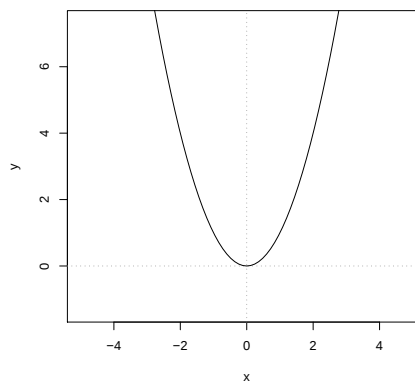
¿Qué valores toma $f(x)$?

¿Qué con los límites?

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) \rightarrow ?$$

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow ?$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow ?$$



- Gráfica $f(x) = 3 - x^2$

x	$f(x)$
0	3
1	2
-1	2
2	-1
-2	-1
3	-6
-3	-6

¿Qué valores puede tomar x ?

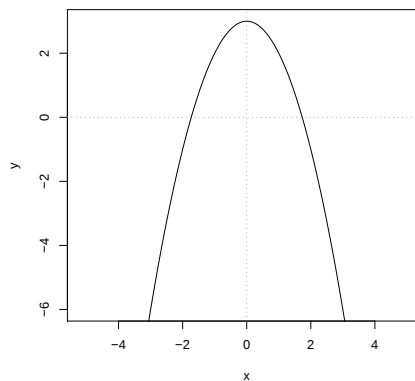
¿Qué valores toma $f(x)$?

¿Qué con los límites?

$$x \rightarrow \pm\sqrt{3} \Rightarrow f(x) \rightarrow ?$$

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow ?$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow ?$$



- Gráfica $f(x) = |x|$

x	$f(x)$
0	0
1	1
-1	1
2	2
-2	2
3	3
-3	3

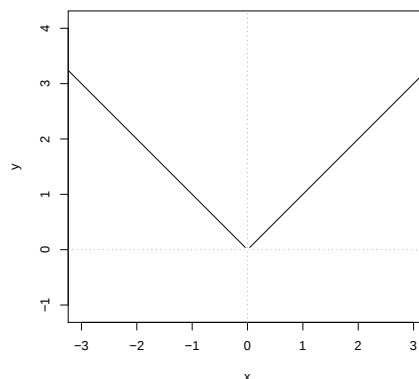
¿Qué valores puede tomar x ?

¿Qué valores toma $f(x)$?

¿Qué con los límites?

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) \rightarrow ?$$

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow ?$$



- Gráfica $f(x) = \sqrt{x-1}$

x	$f(x)$
1	0
2	1
3	$\sqrt{2} \approx 1.41$
4	$\sqrt{3} \approx 1.73$
5	2

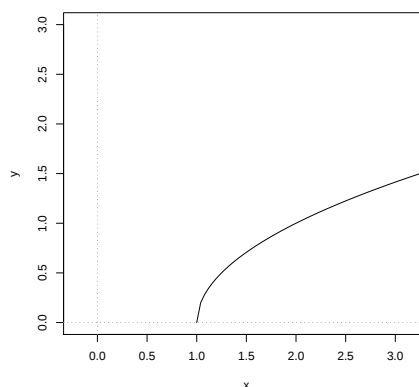
¿Qué valores toma x ?

¿Qué valores toma $f(x)$?

¿Qué con los límites?

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow ?$$

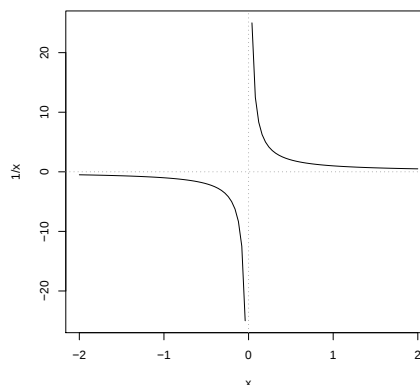
$$x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow ?$$



Observemos que $x - 1 \geq 0$, de otra manera se tiene que $f(x) \notin \mathbb{R}$; por lo tanto $f(x)$ sólo puede tomar valores si $x \geq 1$.

- Gráfica $f(x) = \frac{1}{x}$

x	$f(x)$
1	1
-1	-1
1/2	2
1/3	3
2	1/2
3	1/3
-2	-1/2
-3	-1/3
-1/2	-2
-1/3	-3



Observemos que x está definida $\forall x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$

$$\text{Si } a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

Por ejemplo, si $1 < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < 1$ y si $10 < 11 \Rightarrow \frac{1}{11} < \frac{1}{10}$.

Es decir, que a medida que x crece $f(x)$ decrece.

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow ?$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow ?$$

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow ?$$

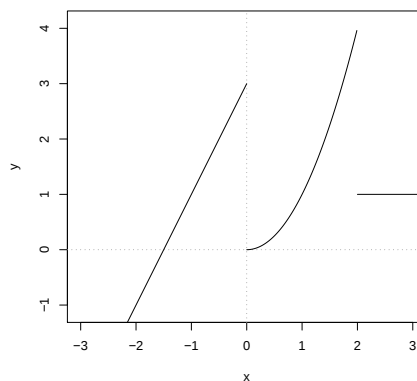
$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow f(x) \rightarrow ?$$

Por lo que $f(x) \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

- Gráfica $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow ? \\ x \rightarrow 0^- \Rightarrow f(x) \rightarrow ? \end{array} \right\} x \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) \rightarrow ?$$

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow 2^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow ? \\ x \rightarrow 2^- \Rightarrow f(x) \rightarrow ? \end{array} \right\} x \rightarrow 2 \Rightarrow f(x) \rightarrow ?$$



Ejercicios

1. Encuentra el dominio y el rango de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{x}$

b) $h(x) = 5x - 3x^5 + 53$

c) $g(x) = \sqrt{6x - 2}$

2. Gráfica las siguientes funciones haciendo uso de una tabla donde se representen los valores del dominio y rango.

a) $f(z) = (z - 2)^2$

b) $h(w) = \frac{2}{w^2}$

2.2. Límites de Funciones y Funciones Continuas

2.2.1. Límites de Funciones

Definición:

Vamos a decir que cuando x tiende a a , $f(x)$ tiende a L .

Notación:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

La idea es la siguiente: Es de interés conocer los valores de $f(x)$ de la función para x muy cercanas a a , pero distintas de a , en muchos de los casos a no se encuentra en el dominio de f .

Definición (límite por la izquierda):

Sea f una función definida en (c, a) , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1.$$

Significa que $f(x)$ puede acercarse arbitrariamente a L_1 eligiendo x suficientemente cerca de a , con $x < a$.

Definición (límite por la derecha):

Sea f una función definida en (a, b) , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2.$$

Significa que $f(x)$ puede acercarse arbitrariamente a L_2 eligiendo x suficientemente cerca de a , con $x > a$.

Teorema: Sea c un punto contenido en un intervalo abierto (a, b) , es decir $c \in (a, b)$, y f una función definida en todo el intervalo (a, b) , excepto posiblemente en c . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x).$$

Ejemplos:

1. $f(x) = \frac{|x|}{x}$

¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

Recordemos que $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{-x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \text{no existe} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$ como estamos acercándonos con $x > 0$, $|x| = x$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

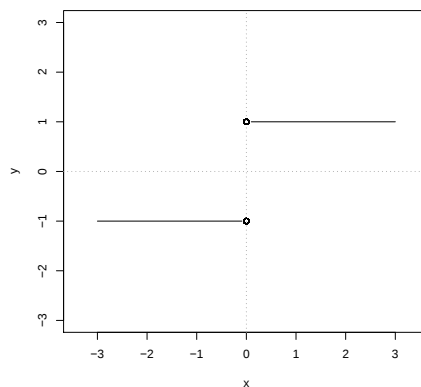
$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$ como estamos acercándonos con $x < 0$, $|x| = -x$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ el límite no existe

Gráfica de $f(x) = \frac{|x|}{x}$

x	$f(x)$
1/10101	1
1	1
1/2	1
2	1
3	1
1/3	1
100	1
-1/101010	-1
-1	-1
-1/2	-1
-2	-1
-3	-1
-124	-1



2. $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < 1 \\ x^2-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Evaluar $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \text{ como estamos acercándonos con } x < 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 - x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 - x = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 - (1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{ como estamos acercándonos con } x > 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1)^2 - 1 = 0$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ no existe}$$

Métodos para calcular límites

1.

$$\lim_{x \rightarrow a} C = C$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

3.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

4.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = LM$$

5.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \text{ y } g(a) \neq 0, M \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M}$$

6.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cL$$

7.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = L - M$$

Ejemplos

1.

$$\lim_{x \rightarrow a} mx + b = \lim_{x \rightarrow a} mx + \lim_{x \rightarrow a} b = ma + b$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 4}{5x + 7}$$

Notemos que $g(x) = 5x + 7 \Rightarrow g(2) = 17 \neq 0$ por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 4}{5x + 7} = \frac{3(2) + 4}{5(2) + 7} = \frac{10}{17}$$

3.

Para todo número real a $\lim_{x \rightarrow a} x^3 = a^3$

$$\lim_{x \rightarrow a} x^3 = (\lim_{x \rightarrow a} x)(\lim_{x \rightarrow a} x)(\lim_{x \rightarrow a} x) = a^3$$

Teorema:Si $n \in \mathbb{N}$. Entonces

1.

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$$

Ejemplos:

1.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2 - 2x + 1}{4x^3 - 7} = \frac{5(3^2) - 2(3) + 1}{4(3^3) - 7} = \frac{45 - 6 + 1}{108 - 7} = \frac{40}{101}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4)^5 = \left\{ \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4) \right\}^5 = (3(2) + 4)^5 = (10)^5 = 100000$$

3. El siguiente ejemplo tiene gran importancia en la práctica en la solución de problemas de límites.

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 5x + 6}$$

Notemos que $h(x)$ lo podemos ver como $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, ahora $g(x) = x^2 - 5x + 6$ evaluado en 3 tenemos $g(3) = (3)^2 - 5(3) + 6 = 0$ por lo que no podemos utilizar directamente ninguno de los métodos antes mencionados. Pero recordando algunas factorizaciones importantes de ecuaciones cuadráticas el problema se vuelve más simple.

$$x^2 + x - 12 = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \Rightarrow a + b = 1 \text{ y } ab = -12 \Rightarrow a = 4 \text{ y } b = -3$$

$$\text{Por lo tanto } x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \Rightarrow a + b = -5 \text{ y } ab = 6 \Rightarrow a = -3 \text{ y } b = -2$$

$$\text{Por lo tanto } x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

Esto nos dice que $h(x)$ no está definida en $x = 3$ ni en $x = 2$, Por lo tanto

$$f(x) = x^2 + x - 12 \Rightarrow f(x) = (x + 4)(x - 3)$$

$$g(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow g(x) = (x - 3)(x - 2)$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 5x + 6} \Rightarrow h(x) = \frac{(x + 4)(x - 3)}{(x - 3)(x - 2)} \Rightarrow h(x) = \frac{x + 4}{x - 2}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 4}{x - 2} = \frac{3 + 4}{3 - 2} = 7 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 7$$

4.

Sea $f(x) = \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$ definida $\forall x \neq 9$ tal que $x \in \mathbb{R}$ ¿Calcula $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$?

$$\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} \right) \left(\frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}{x - 9}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} + 3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} + 3) = \sqrt{9} + 3 = 6$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = 6$$

2.2.2. Funciones Continuas

En la definición de límite se hizo énfasis en que $x \neq a$ pero con x lo más cerca posible de a . De hecho se mostraron ejemplos en los cuales a no pertenecía al dominio de $f(x)$, por ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

Ahora vamos a enfocarnos en los casos en los que a se halla en el dominio de $f(x)$ y el límite de $f(x)$ existe, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Definición (función continua):

Una función f es **continua** en un número a si satisface las tres condiciones siguientes:

1. f está definida en un intervalo abierto que contiene a a

2.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existe}$$

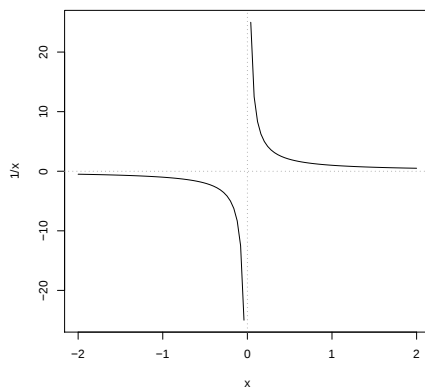
3.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Si f **no es continua** en a , se dice que es **discontinua** en a .

Ejemplos:

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ ¿Es continua en 0?



NO, pues no cumple con (1), ya que f no está definida en 0 para cualquier intervalo abierto que lo contenga.

2. $h(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$ ¿Es $h(z)$ continua en 0?

Cumple con (1). Pero no cumple con (2) pues

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} h(z) \rightarrow \infty$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} h(z) \rightarrow -\infty$$

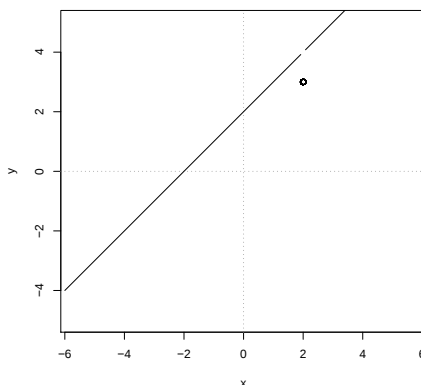
$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} h(z) \text{ no existe}$$

Por lo tanto $h(z)$ no es continua.

3. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ con dominio $\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{2\}$ ¿Es continua en 2?

$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} \Rightarrow f(x) = x + 2$ NO es continua puesto que no está definida en $x = 2$, por lo que no cumple con la condición (1) de la definición de continuidad.

4. Si re-definimos a $f(x)$ como $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$



$h(x)$ está definida para todo intervalo abierto que contenga a 2, cumple con (1).

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = 4 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 4$$

Cumple con (2). Pero tenemos que

$$h(2) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow 2} h(2) = 4$$

Por lo tanto $h(x)$ no es continua en 2.

5. Redefinimos a $h(x)$ como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Por lo tanto $f(x)$ si es continua en 2 pues

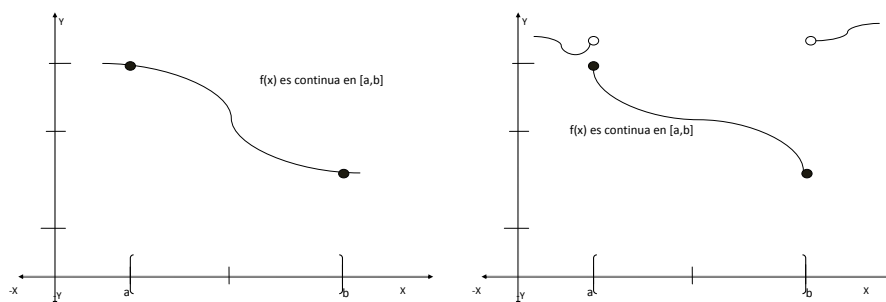
$$f(2) = 4 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

Se ha definido la continuidad de f en un punto a , ahora vamos a definir continuidad en un intervalo $[a, b]$.

Definición (función continua):

Decimos que la función es **continua** en $[a, b]$ si es continua en cada punto de (a, b) y además cumple con:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$



Teorema: Si las funciones f y g son continuas en a , entonces:

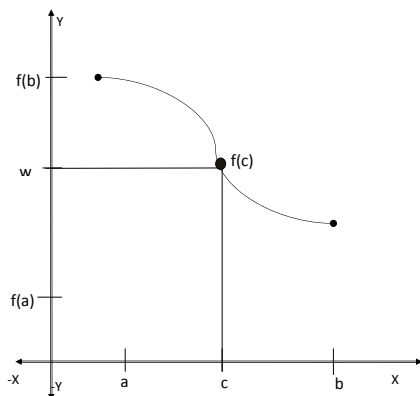
1. $f + g$ es continua en a
2. $f - g$ es continua en a
3. $f \cdot g$ es continua, es decir, el producto es continuo en a
4. f/g es continua, es decir, la razón es continua en a si $g(a) \neq 0$

Teorema del Valor Intermedio

Si f es continua en $[a, b]$ y w es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = w$.

Escrito más brevemente:

Sea f continua en $[a, b]$ y $w \in [f(a), f(b)] \Rightarrow \exists c \in [a, b]$ tal que $f(c) = w$.



Teorema: Si una función f es continua en un intervalo $[a, b]$ y no tiene ceros en (a, b) entonces $f(x) > 0$ ó $f(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Ejemplo. Con $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$, encuentre los valores de x para los que:

1. $f(x) > 0$
2. $f(x) < 0$

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 = x^2 \underbrace{(x^2 - 4x + 3)}_{(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab} = x^2(x-3)(x-1) \Rightarrow f(x) = x^2(x-3)(x-1)$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = 3 \text{ además } f \text{ es continua en } \mathbb{R}$$

¿Cuál es el signo de f en $(-\infty, 0)$?

¿Cuál es el signo de f en $(0, 1)$?

¿Cuál es el signo de f en $(1, 3)$?

¿Cuál es el signo de f en $(3, \infty)$?

$$\begin{aligned}f(-1) &= (-1)^2(-1 - 3(-1 - 1)) \\&= 1(-4)(-2) \\&= 8 > 0\end{aligned}$$

f no tiene ceros en $(-\infty, 0)$ y como $f(-1) = 8 > 0$

$\Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in (-\infty, 0)$ pues f es continua y por el teorema

$$\begin{aligned}f(1/2) &= (1/4)(1/2 - 6/2)(1/2 - 2/2) \\&= 1/4(-5/2)(-1/2) \\&= 5/16 > 0\end{aligned}$$

f no tiene ceros en $(0, 1)$ y como $f(1/2) > 0$

$\Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in (0, 1)$ pues f es continua y por el teorema

$$\begin{aligned}f(2) &= 4(-1)(1) \\&= -4 < 0\end{aligned}$$

f no tiene ceros en $(1, 3)$ y como $f(2) < 0$

$\Rightarrow f(x) < 0 \forall x \in (1, 3)$ pues f es continua y por el teorema

$$\begin{aligned}f(4) &= 16(1)(3) \\&= 48 > 0\end{aligned}$$

f no tiene ceros en $(3, \infty)$ y como $f(4) > 0$

$\Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in (3, \infty)$ pues f es continua y por el teorema

Ejercicios

1. Calcula los siguientes límites.

a)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$

2. Diga si la siguiente función es continua y en caso afirmativo diga en dónde.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ 35^2 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

3. Encuentra los valores para los cuáles $g(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 2x^3$ es $g(x) < 0$ y $g(x) > 0$

2.3. La Derivada

2.3.1. Conceptos Básicos

La derivada es uno de las herramientas más poderosas y útiles para conocer el comportamiento de una función continua.

Definición (derivada de una función):

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a a , $a \in (c, d)$, la **derivada** de f en a denotada por $f'(a)$ está dada por:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Pero, ¿cómo se interpreta la derivada?

Si $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe, entonces $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. La recta tangente a una función $f(x)$ en a es la recta que más se parece a la función en el punto $(a, f(a))$. Es muy común interpretar la recta tangente como aquella que sólo pasa por un punto de la función, sin embargo, un poco de razonamiento debe llevar al lector a darse cuenta de que esta definición lleva a muchos problemas y no explica adecuadamente lo que es una recta tangente.

Sólo nos falta saber, ¿cómo calcularíamos la recta? Pues obtenemos $f'(a)$ y calculamos la ecuación punto pendiente de la siguiente forma: $y - f(a) = \underbrace{f'(a)(x - a)}_{\text{ecuación punto pendiente}}$, de donde

tenemos que

$$y = f'(a)x + f(a) - af'(a) \tag{2.1}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de x^3 en a vía la definición.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + xa + a^2)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} x^2 + xa + a^2 \\ &= 3a^2 \end{aligned}$$

Entonces, $f'(a) = 3a^2 \forall a \in \mathbb{R}$, como esto sucede para toda a (o a dentro de un cierto conjunto de valores), se le denota como una función, por lo tanto, tenemos que $f'(x) = 3x^2$.

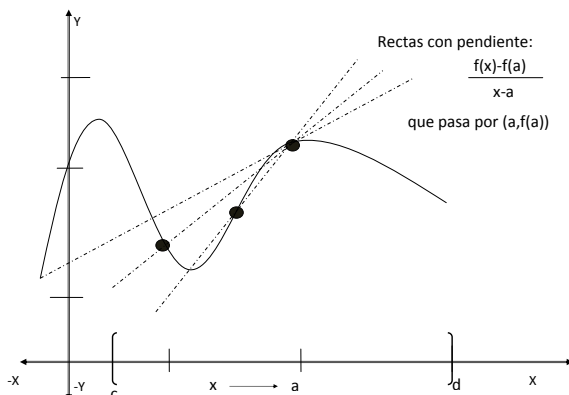


Figura 2.3: Rectas con pendiente $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ aproximándose a $f'(a)$

A continuación, para el ejemplo anterior, vamos a graficar $f(x)$ junto con la recta tangente a un punto dado. Para graficar $f(x) = x^3$ tabulamos, pues hasta ahora es la única herramienta que tenemos para graficar. Supongamos que queremos la recta tangente

x	$f(x)$
0	0
1/2	1/8
-1/2	-1/8
1	1
-1	-1
2	8
-2	-8

a $(1, f(1)) = (1, 1) \Rightarrow f'(1) = 3$, por lo que de la ecuación (2.1) $y = 3x - 2$ es la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(1, f(1)) = (1, 1)$.

En la Figura 2.4 se muestra la gráfica correspondiente.

Observación 3. Si la derivada existe para todos los números a dentro de algún intervalo, entonces, en lugar de $f'(a)$ denotamos la derivada como $f'(x)$, en los libros suelen manejarse distintas notaciones, algunas de ellas son:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = D_x f(x),$$

todas ellas denotan lo mismo, por lo que no debe haber confusión.

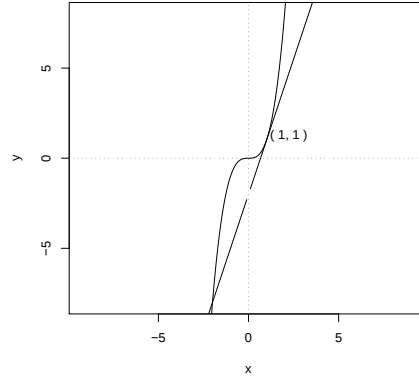


Figura 2.4: Función $f(x) = x^3$ junto con la recta tangente al punto $(1, f(1)) = (1, 1)$

Tomando en cuenta lo anterior, tenemos que si $f(x) = x^3$ entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \\ \frac{dx^3}{dx} &= 3x^2 \\ D_x(x^3) &= 3x^2 \end{aligned}$$

A lo largo de estas notas, para denotar la derivada de $f(x)$ utilizaremos $f'(x)$ o $\frac{df(x)}{dx}$.

Métodos para calcular derivadas

Algunas fórmulas comunes para el cálculo de la derivada son las siguientes:

1. $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$ este resultado es tan sencillo que se puede demostrar vía la definición de la siguiente forma

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{c - c}{x - a} = 0$$

2. $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ este resultado también se probará

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1$$

3. Si $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

4. Si $cf(x) \Rightarrow (cf(x))' = cf'(x)$

5. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

6. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Ejemplos:

- Sean $f(x) = x^5 + 4x^2 + 2$ y $g(x) = x$ vamos a calcular algunas derivadas utilizando las fórmulas anteriores. Primero que nada, tenemos que

$$f'(x) = 5x^4 + 8x \text{ y } g'(x) = 1$$

Entonces si queremos

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= (5x^4 + 8x)x + (x^5 + 4x^2 + 2)1 \\ &= 5x^5 + 8x^2 + x^5 + 4x^2 + 2 \\ &= 6x^5 + 12x^2 + 2\end{aligned}$$

- Ahora vamos a derivar $f(x) = (x^3 + 1)(2x^2 + 8x - 5)$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2(2x^2 + 8x - 5) + (x^3 + 1)(4x + 8) \\ &= 6x^4 + 24x^3 - 15x^2 + 4x^4 + 4x + 8x^3 + 8 \\ &= 10x^4 + 32x^3 - 15x^2 + 4x + 8\end{aligned}$$

Vamos a continuar con las fórmulas de derivación.

$$7. \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2} \text{ siempre que } g(x) \neq 0$$

$$8. \text{ Sea } n \in \mathbb{N}, \text{ si } f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -nx^{-n-1}.$$

$$\begin{aligned}\text{Pues } f(x) &= x^{-n} = \frac{1}{x^n} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}\end{aligned}$$

$$9. \text{ El resultado más general acerca de derivadas de potencias dice, si } m, n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \neq 0$$

$$\Rightarrow f(x) = x^{m/n} \Rightarrow f'(x) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

Ejemplos:

$$\blacksquare \text{ Sea } f(x) = \frac{3x^2 - x + 2}{4x^2 + 5}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(6x - 1)(4x^2 + 5) - (8x)(3x^2 - x + 2)}{(4x^2 + 5)^2} \\ &= \frac{24x^3 + 30x - 4x^2 - 5 - 24x^3 + 8x^2 - 16x}{(4x^2 + 5)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 14x - 5}{(4x^2 + 5)^2}\end{aligned}$$

$$\blacksquare \text{ Sea } f(x) = 6\sqrt[3]{x^4} + \frac{4}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(x) = 6x^{4/3} + 4x^{-1/2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6\left(\frac{4}{3}\right)x^{\frac{4}{3}-1} - \frac{1}{2}(4)x^{-\frac{1}{2}-1} \\ &= 8x^{1/3} - 2x^{-3/2} \\ &= 8\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x^3}} \end{aligned}$$

Regla de la cadena

A veces podemos ver a $h(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$, esto se lee como la “composición de f y g ”, aquí sólo hay que tener cuidado con que f este definida en el contradominio de g . Por ejemplo:

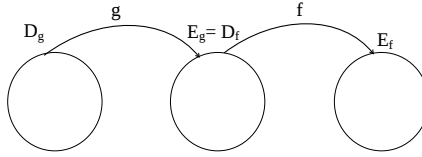


Figura 2.5: Composición de f y g

Sea $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x^2 + 7x + 2 \Rightarrow f(g(x)) = (2x^2 + 7x + 2)^3$ entonces, no hay problema pues $E_f = \mathbb{R}$ y $D_g = \mathbb{R}$.

Sin embargo podemos tener casos como el siguiente; sea $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = -5x \Rightarrow f(g(x)) = \sqrt{-5x}$, por lo que para que la composición este bien definida, necesitamos que $-5x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$ por lo tanto

$$g : (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty) \Rightarrow f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

Con estos aspectos técnicos tomados en cuenta, podemos enunciar la regla de la cadena.

Si $f(g(x))$ esta bien definida, entonces podemos calcular la derivada de la composición de la siguiente forma:

$$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x) \quad (2.2)$$

Ejemplos:

- Sea $f(x) = (3x^2 - 7x + 1)^5 \Rightarrow$

$$f'(x) = 5(3x^2 - 7x + 1)^4(6x - 7) = 5(6x - 7)(3x^2 - 7x + 1)^4$$

- Sea $f(x) = (x^2 - 1)^4 \Rightarrow$

$$f'(x) = 4(x^2 - 1)^3 2x = 8x(x^2 - 1)^3$$

- Sea $f(x) = \frac{1}{(4x^2 + 6x - 7)^3} \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{-3(4x^2 + 6x - 7)^2(8x + 6)}{(4x^2 + 6x - 7)^6} = \frac{-6(4x + 3)}{(4x^2 + 6x - 7)^4}$$

Ejercicios

1. Obtén la recta tangente en $(2, f(2))$ donde $f(x) = (x - 1)^2$
2. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $g(x) = 2x^3(\sqrt{x})$

b) $h(x) = \frac{3x^5 + 2x^3}{7x^3 - x^2}$

c) $q(x) = \left(\sqrt[3]{x^2 + 2}\right)^2$

d) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. [Si $f(x) = \sin(x)$ entonces $f'(x) = \cos(x)$]

2.3.2. Aplicaciones de la Derivada

En esta sección describiremos una de las aplicaciones fundamentales de la derivada, el de conocer y poder graficar el comportamiento de una función.

Primero necesitamos saber qué es un mínimo y máximo locales de una función $f(x)$, sin embargo, basta explicar lo que es un mínimo local, pues el concepto de máximo local es totalmente análogo. Vamos a decir que $f(x)$ tiene un mínimo local en c , si existe un intervalo abierto (a, b) tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo x en (a, b) . Con esta información, podemos enunciar uno de los teoremas básicos de la derivada.

Teorema 2. Sea f una función continua. Si f tiene un máximo o mínimo local en un número c de un intervalo abierto, entonces $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.

Lo que nos dice el teorema anterior, es que si queremos encontrar lo máximos y mínimos locales de una función $f(x)$, tenemos que resolver la ecuación $f'(x) = 0$. De esta

forma estaremos encontrando los puntos de $(c, f(c))$ tales que la recta tangente a esos puntos sea paralela al eje de las x 's. Un aspecto importante que no se tratara aquí; es cuando la derivada no existe, es conveniente que el lector revise las referencias bibliográficas para saber qué sucede en estos casos.

¿Cómo se vería un mínimo local?

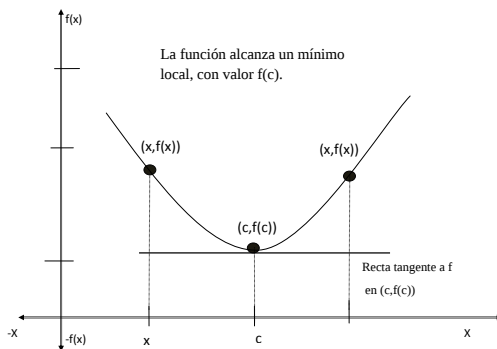


Figura 2.6: Mínimo local

¿Cómo se vería un máximo local?

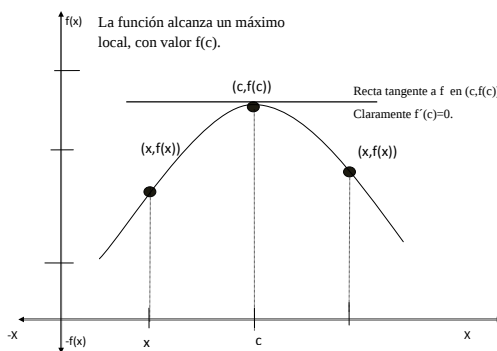


Figura 2.7: Máximo local

Si $f(c)$ no es un máximo ni mínimo local

1. A la izquierda de c la función crece o decrece
2. A la derecha de c la función sigue con el mismo comportamiento que a la izquierda de c .

¿Cómo se vería la función en un punto $(c, f(c))$ en donde $f(c)$ no es ni máximo ni mínimo local, pero $f'(c) = 0$?

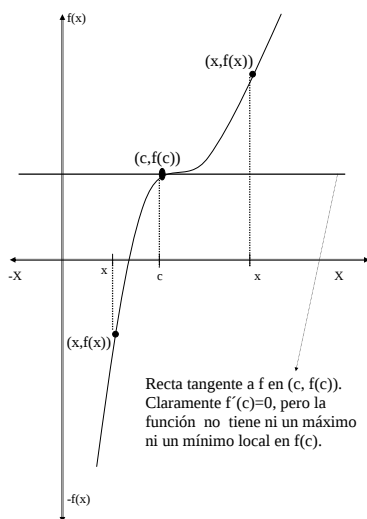


Figura 2.8: Un punto tal que su derivada es cero, pero no es ni máximo ni mínimo local

El siguiente teorema se puede deducir observando detenidamente las gráficas anteriores, es un resultado poderoso para conocer el comportamiento de una función $f(x)$.

Teorema 3. (*Criterio de la primer derivada*)

Sea f una función con $f'(c) = 0$.

1. Si para $x < c$, se tiene que $f'(x) < 0$ y para $x > c$, $f'(x) > 0 \Rightarrow c$ es un mínimo local.
2. Si para $x < c$, se tiene que $f'(x) > 0$ y para $x > c$, $f'(x) < 0 \Rightarrow c$ es un máximo local.
3. Si el signo de $f'(x)$ no cambia para $x < c$ y $x > c$ entonces, c no es ni un máximo local ni un mínimo local.

En la Figura 2.9 se muestra de forma general cómo se ve una función con mínimos y máximos locales.

Ejemplo: Calcule el máximo y el mínimo locales y trace la gráfica en $[-3, 5]$ de

$$f(x) = x^3 - 12x$$

1. Vamos a calcular los puntos en los que $f(x) = 0$. Tenemos que

$$f(x) = x^3 - 12x = x(x^2 - 12)$$

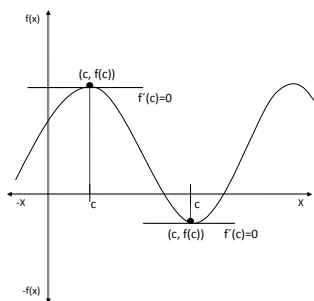


Figura 2.9: Gráfica de función continua con un máximo y mínimo local

Entonces las raíces de $f(x)$ (o los puntos por los que f interseca al eje de las x 's) son $x = 0$ y los puntos que satisfacen $x^2 - 12 = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 - 12 = 0 &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{12} \\ &\Leftrightarrow x \approx \pm 3.46 \end{aligned}$$

Entonces las raíces de $f(x)$ son $x = 0, -3.46, 3.46$.

2. Vamos a encontrar los puntos críticos ($f'(c) = 0$).

$$\begin{aligned} f(x) = x^3 - 12x &\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 \\ &\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 12/3 = 4 \\ &\Leftrightarrow x = \pm 2 \end{aligned}$$

Entonces los puntos críticos son $x = -2, 2$

3. Vamos a evaluar f en los puntos críticos.

$$\begin{aligned} f(-2) &= -2(4 - 12) = 16 \\ f(2) &= 2(4 - 12) = -16 \end{aligned}$$

4. Ahora vamos a usar el criterio de la primera derivada para saber si los puntos críticos son máximos o mínimos locales. Sabemos que $f'(2) = 0$ y $f'(-2) = 0$, por lo que son los puntos críticos. Entonces tenemos que hacer las siguientes preguntas.

¿Qué pasa para $x < -2$? Tomamos un punto del intervalo, por ejemplo $x = -3$, entonces $f'(-3) = 9 > 0$ por lo que f crece para $x < -2$.

¿Qué pasa para $-2 < x < 2$? Volvemos a tomar un punto en este intervalo, por ejemplo $x = 1$ y evaluamos $f'(1) = -9 < 0$ por lo que f decrece para $-2 < x < 2$.

¿Qué pasa para $x > 2$? De nuevo tomamos un punto en este intervalo, por ejemplo $x = 3$ y evaluamos $f'(3) = 15 > 0$ por lo que f crece para $x > 2$.

De lo anterior, tenemos que por el criterio de la primer derivada el punto $x = 2$ con $f(2) = -16$ es el mínimo local y $x = -2$ con $f(-2) = 16$ es el máximo local. Para saber si son mínimos absolutos o máximos absolutos en $[-3, 5]$, como la función es continua (este es el punto medular aquí) sólo tendríamos que saber cuanto vale f en los extremos del intervalo $f(-3) = -3(9 - 12) = 9$ y $f(5) = 5(25 - 12) = 65$, tomando esto en cuenta podemos hacer la siguiente gráfica.

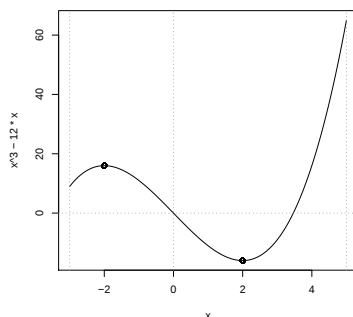


Figura 2.10: Gráfica de $f(x) = x^3 - 12x$

Con esta gráfica vemos que el mínimo y máximo absolutos en $[-3, 5]$ son, respectivamente, $x = 2$ con $f(2) = -16$ y $x = 5$ con $f(5) = 65$.

A estas alturas el siguiente resultado puede ser evidente, sin embargo, es muy útil para saber si la función es creciente o decreciente en un intervalo.

Teorema 4. Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)

- Si $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b)$, entonces f es creciente en $[a, b]$.
- Si $f'(x) < 0 \forall x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en $[a, b]$.

La Figura 2.11 muestra la aplicación que se le puede dar a la derivada para determinar si cierta función es creciente o decreciente en un intervalo.

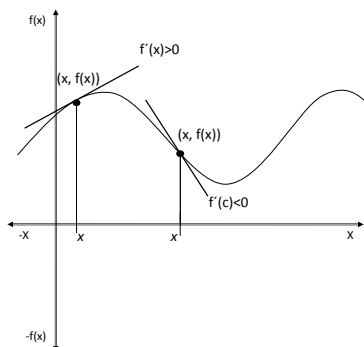


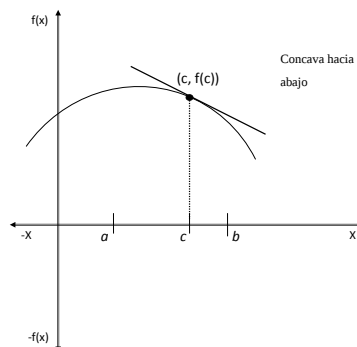
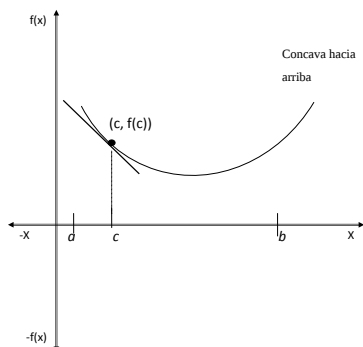
Figura 2.11: Ejemplo de la aplicación de la derivada

Con el objetivo de tener más herramientas y poder graficar una función con más precisión es necesario introducir el concepto de concavidad.

Definición (concavidad de una función):

Sea f una función derivable en un número c .

- La gráfica de f tiene **concavidad hacia arriba** en el punto $(c, f(c))$ si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c , tal que en (a, b) la gráfica de f está por **encima** de la recta tangente a $(c, f(c))$.
- La gráfica de f tiene **concavidad hacia abajo** en el punto $(c, f(c))$ si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c , tal que en (a, b) la gráfica de f está por **abajo** de la recta tangente a $(c, f(c))$.



Lo que buscamos es una herramienta que nos permita saber de forma fácil y rápida,

si tenemos un máximo o mínimo local, entonces, lo que necesitamos es saber si la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo de forma analítica. La siguiente herramienta nos servirá para este fin.

Teorema 5. (*Prueba de Concavidad*)

Sea f una función derivable en un intervalo abierto que contiene a c , tal que $f''(c)$ existe.

- Si $f''(c) > 0$ entonces la gráfica tiene concavidad hacia arriba en $(c, f(c))$.
- Si $f''(c) < 0$ entonces la gráfica tiene concavidad hacia abajo en $(c, f(c))$.

Para hacer evidente hacia a donde nos dirigimos, vamos a ver que sucede con $f'(x)$ cuando $f(x)$ es cóncava hacia arriba. Lo que pasa es que $f'(x)$ crece, esto debe ser claro al observar la siguiente gráfica (las pendientes de las rectas tangentes a cada punto de la siguiente gráfica).

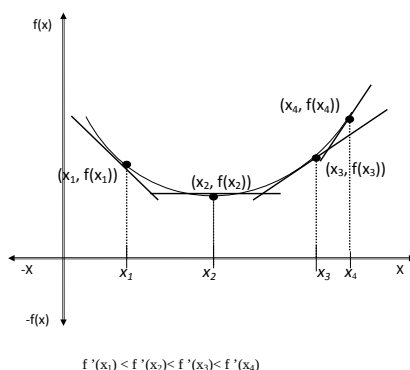


Figura 2.12: Comportamiento de $f'(x)$ cuando $f(x)$ es cóncava hacia arriba

Recordemos el teorema 4, éste dice que si $g(x)$ es una función continua y $g'(x) > 0$ en $(a, b) \Rightarrow g(x)$ crece en $[a, b]$. Con esto en mente, si queremos saber si $f(x)$ es cóncava hacia arriba, en cierto intervalo, sólo tenemos que saber si $f'(x)$ es creciente en ese intervalo, y esto lo sabremos verificando que $f''(x) > 0$ dentro de nuestro intervalo de interés. Entonces si $f''(x) > 0$ en $(a, b) \Rightarrow f'(x)$ crece en $[a, b]$ y por lo tanto $f(x)$ es cóncava hacia arriba en (a, b) .

Entonces, ¿qué tenemos?

Supongamos que $f'(c) = 0$ para algún c en (a, b) , por lo tanto, c es un máximo o mínimo local de $f(x)$ en (a, b) . Si resulta que $f''(c) > 0$ querría decir, por todo lo anterior, que $f(x)$ es cóncava hacia arriba en (a, b) , entonces forzosamente c es un mínimo local.

En caso de que la función sea cóncava hacia abajo es totalmente análogo y lo estableceremos en el bien conocido criterio de la segunda derivada, pero antes necesitamos saber lo que sucede con los puntos en los que la concavidad cambia.

Definición (punto de inflexión):

Un punto $(k, f(k))$ en la gráfica de una función f es un **punto de inflexión** si existe un intervalo (a, b) que contiene a k y f'' cambia de signo en k , entonces debe de tenerse que $f''(k) = 0$.

El punto de inflexión es un punto en donde la concavidad cambia.

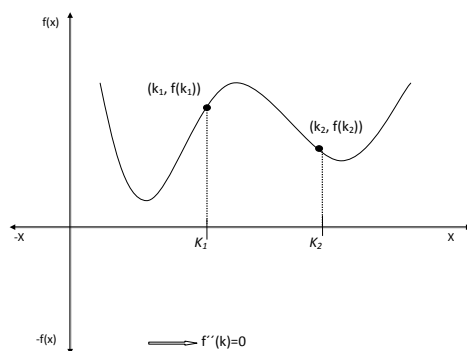


Figura 2.13: Punto de Inflexión

En este momento, ya estamos listos para enunciar uno de los resultados más conocidos y a la vez menos comprendidos para detectar máximos y mínimos locales. Este teorema es el resultado de todo el análisis anterior.

Teorema 6. (*Criterio de la segunda derivada*)

Sea f una función derivable en (a, b) en donde $c \in (a, b)$ y $f'(c) = 0$ (c es un punto crítico)

- Si $f''(c) < 0$ entonces f tiene un máximo local en c .
- Si $f''(c) > 0$ entonces f tiene un mínimo local en c .

Los máximos y mínimos locales que podríamos encontrar y graficar mediante el criterio de la segunda derivada se verían como los de la Figura 2.14.

Utilizando todo lo anterior podemos hacer una guía para poder graficar una función continua.

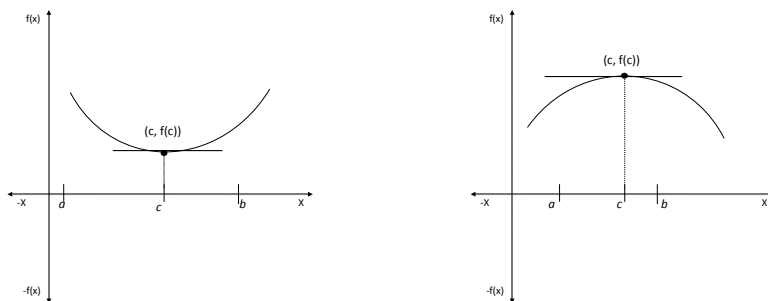


Figura 2.14: Criterio de la segunda derivada, en donde se localiza un mínimo y máximo local, respectivamente

Guía para graficar una función continua

1. Determinar el dominio de f . En este paso debemos identificar los puntos en los que f no está definida (en caso de que existan).
2. Verificar si f es continua y sus posibles discontinuidades. Recuerden que para utilizar muchos de los resultados vistos en estas notas, necesitamos que f sea continua en $[a, b]$.
3. Encontrar las raíces de f (los puntos en los que $f(x)$ intersecta el eje de las x 's).
4. Encontrar los puntos críticos de f ($f'(c) = 0$).
5. Determinar si los puntos críticos son máximos o mínimos locales. Esto debe hacerse con el criterio de la primera derivada o con el criterio de la segunda derivada. Es importante mencionar que si $f'(c) = 0$ y $f''(c) = 0$ para determinar qué clase de punto es c debemos utilizar el criterio de la primera derivada, pues claramente el criterio de la segunda derivada falla.
6. Encontrar los puntos de inflexión.
7. Evaluar la función en los puntos encontrados y graficar.

De la lista anterior el paso 3 (puede llegar a ser difícil despejar x) y 6 pueden ser omitidos, sin embargo la gráfica quedará mejor si se les incluye. Vamos a graficar algunas funciones utilizando lo visto anteriormente, en este caso trataremos de seguir todos los pasos.

Ejemplos:

1. Sea $f(x) = 12 + 2x^2 - x^4$ realizar todo el procedimiento anterior para graficar f .

1. Su dominio es todo $\mathbb{R}$.
2. La función es continua en todo $\mathbb{R}$.
3. Vamos a encontrar las raíces de $f(x)$.

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\Leftrightarrow -x^4 + 2x^2 + 12 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 = 12 \\
 &\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 12 + 1 \\
 &\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = 13 \\
 &\Leftrightarrow x^2 = 1 + \pm\sqrt{13} \\
 &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1 + \pm\sqrt{13}}
 \end{aligned}$$

Nos quedamos sólo con las raíces reales, entonces

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{13}}, -\sqrt{1 + \sqrt{13}} \Rightarrow x = 2.14, -2.14$$

4. Vamos a encontrar los puntos críticos de f .

$$\begin{aligned}
 f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 4x(1 - x^2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } 1 - x^2 = 0
 \end{aligned}$$

Pero $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$ por lo que $x = \mp 1$. Por lo tanto los puntos críticos son $x = 0, 1, -1$.

5. Tenemos que determinar si los puntos críticos son mínimos o máximos locales. Esto lo haremos mediante el criterio de la segunda derivada.

$$f'(x) = 4x - 4x^3 \Rightarrow f''(x) = 4 - 12x^2$$

Evaluyendo

$$\begin{aligned}
 f''(0) &= 4 > 0 \Rightarrow 0 \text{ es un mínimo local.} \\
 f''(-1) &= -8 < 0 \Rightarrow -1 \text{ es un máximo local.} \\
 f''(1) &= -8 < 0 \Rightarrow 1 \text{ es un máximo local.}
 \end{aligned}$$

6. Ahora vamos a encontrar los puntos de inflexión

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 12x^2 = 0$$

$$\begin{aligned}
 4 - 12x^2 = 0 &\Leftrightarrow 1 - 3x^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 = 1/3 \\
 &\Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

Entonces los puntos de inflexión son $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

7. Evaluamos en los puntos encontrados y graficamos

$$f(\pm 2.14) = 0 \text{ esto es obvio.}$$

$$f(-1) = 12 + 2 - 1 = 13 \text{ máximo local.}$$

$$f(1) = 13 \text{ máximo local.}$$

$$f(0) = 12 \text{ mínimo local.}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 12 + 2/3 - 1/9 = \frac{108 + 6 - 1}{9} = \frac{113}{9} = 12.5 \text{ punto de inflexión.}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 12 + 2/3 - 1/9 = \frac{108 + 6 - 1}{9} = \frac{113}{9} = 12.5 \text{ punto de inflexión.}$$

A continuación mostramos la gráfica realizada en el paquete **R**.

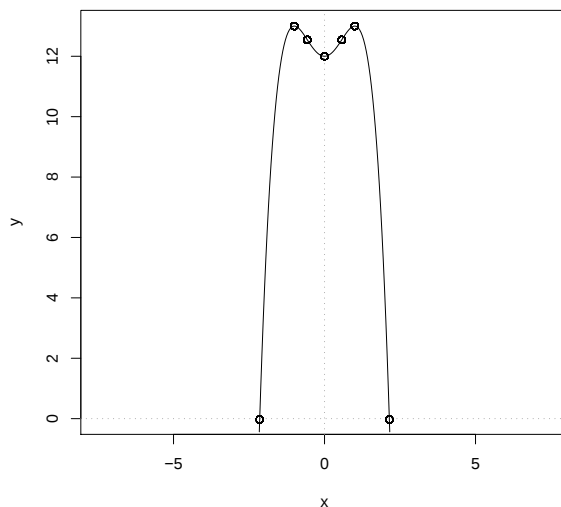


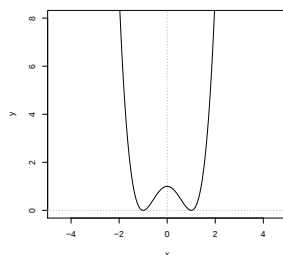
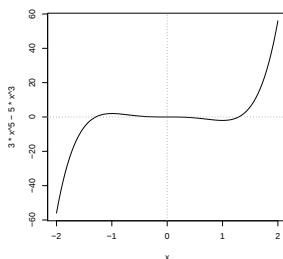
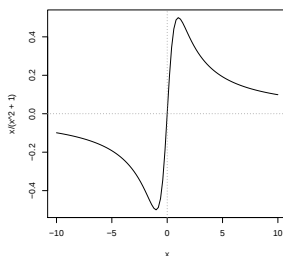
Figura 2.15: Función $f(x) = 12 + 2x^2 - x^4$

Las siguientes funciones se dejan al lector, pero se muestra la gráfica a la que se debe llegar.

ii) $f(x) = (x^2 - 1)^2$

iii) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

iv) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

Figura 2.16: Función $f(x) = (x^2 - 1)^2$ Figura 2.17: Función $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ Figura 2.18: Función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

Ejercicios

Gráfica las siguientes funciones haciendo uso del criterio de la primera y segunda derivada, así también verificando dónde la función es cóncava hacia arriba y hacia abajo, los puntos de inflexión, las raíces de la función.

- i. $f(x) = x^4 - 2$
- ii. $g(x) = x^3 - x^2 - 2x$

iii. $h(x) = x^5 + x^3$

2.4. La Integral

La integral generaliza el concepto de área y su construcción básica se centra en el cálculo del área de regiones simples, ¿cómo?

El área de un rectángulo, digamos R , es $Area(R) = bh$, usando esto, si se quiere calcular el área bajo $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ con $f(x)$ continua en $[a, b]$. Veamos la Figura 2.19 para tener una mejor imagen de f .

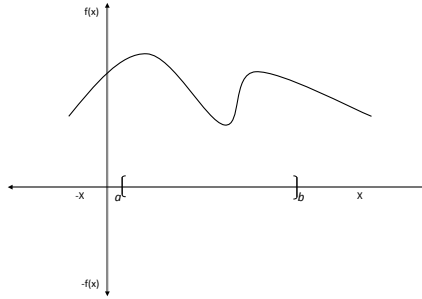


Figura 2.19: Función $f(x)$ tal que $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$

Podemos dividir el intervalo $[a, b]$ en n sub intervalos, de forma que todos tengan la misma longitud $\frac{b-a}{n}$. Entonces los puntos de división de cada intervalo serían:

$$\Rightarrow x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \dots, x_{n-1} = a + (n-1)\frac{b-a}{n}, x_n = b$$

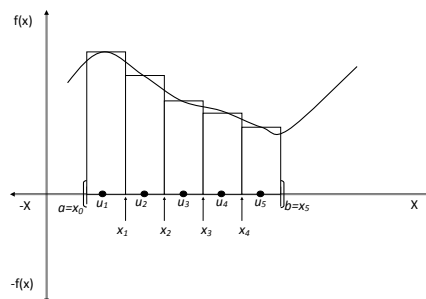
Y claramente con esta construcción, tenemos que:

$$\Rightarrow x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$$

Ahora, para construir nuestros rectángulos hacemos $u_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$ el punto medio de cada intervalo y evaluamos f en cada u_k ($f(u_k)$) y tomamos esto como la altura de cada rectángulo, mientras que el ancho será $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$, con esto, podemos construir la gráfica de la Figura 2.20.

De la Figura 2.20 tenemos que $n = 5 \Rightarrow x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{5}$ la longitud de la base de cada rectángulo y la longitud de altura de cada rectángulo es $f(u_k)$. Entonces, una aproximación al área debajo de la función es

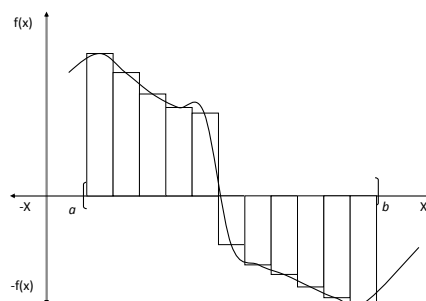
$$\sum_{k=1}^5 f(u_k) \left(\frac{b-a}{5} \right)$$

Figura 2.20: Aproximación área debajo de f

Y si hacemos que la partición sea cada vez más fina (aumentando n), tenemos que el área debajo de f será

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(u_k) \left(\frac{b-a}{n} \right)$$

La misma idea que en la parte anterior se aplica cuando $f(x) < 0$.

Figura 2.21: Aproximación área de f cuando es tanto positiva como negativa

El área que se encuentra arriba menos el área que se encuentra por bajo es igual a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(u_k) \left(\frac{b-a}{k} \right)$$

Definición (integral de una función):

Sea f una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. La **integral** definida de f entre a y b se denota por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(u_k) \left(\frac{b-a}{n} \right)$$

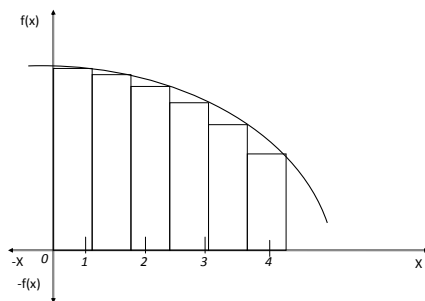
Ejemplo:

Vamos a calcular una integral vía la definición, esto lo haremos por única vez y sólo para que el lector se convenza de que una integral se calcula realmente como una suma.

Sea $f(x) = 16 - x^2$, calcular el área bajo $f(x)$ en $[0, 3]$.
Se parte el intervalo en:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{3}{n}, x_2 = 2 \left(\frac{3}{n} \right), x_3 = 3 \left(\frac{3}{n} \right), \dots, x_n = 3$$

Y por simplicidad $u_1 = \frac{3}{n}, u_2 = 2 \frac{3}{n}, \dots, u_n = 3$.



$$\begin{aligned}
\int_0^3 16 - x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ 16 - \left[k \left(\frac{3}{n} \right) \right]^2 \right\} \left(\frac{3}{n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(16 - \frac{9k^2}{n^2} \right) \left(\frac{3}{n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{48}{n} - \frac{27k^2}{n^3} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(\frac{48}{n} \right) - \frac{27}{n^3} \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) \right] \\
&= 48 - 27 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^3} \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

Para resolver lo anterior, tenemos que saber lo siguiente:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right]^n = 0$$

$$\text{y que } \sum_{k=1}^n k^2 = 1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Entonces, sustituyendo

$$\begin{aligned}
\int_0^3 16 - x^2 dx &= 48 - 27 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \right] \\
&= 48 - 27 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \\
&= 48 - \frac{27}{3} = 48 - 9 \\
&= 39
\end{aligned}$$

Entonces, el área bajo $f(x)$ en $[0, 3]$ es igual a 39. Le repetimos al lector que esto es sólo para convencerlo de que en realidad una integral se calcula mediante sumas, y de hecho todo lo correspondiente a integrales se demuestra de esta forma, sin embargo, no seguiremos este proceso y nos limitaremos sólo a enunciar algunos resultados importantes acerca de integrales y probaremos sólo los más sencillos.

Propiedades de la integral definida

- Si $f(a)$ existe $\Rightarrow \int_a^a f(x) dx = 0$

- Sea c cualquier número real, entonces $\int_a^b c dx = c(b-a)$

Demostración:

La primer propiedad es obvia, pues el área debajo de $f(x)$ de a a a es cero. Para la segunda sólo hay que emplear la definición, entonces

$$\begin{aligned}\int_a^b c dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c \left(\frac{b-a}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} nc \left(\frac{b-a}{n} \right) \\ &= c(b-a)\end{aligned}$$

Teorema 7. Si f y g son integrables en $[a, b]$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\begin{aligned}i. \int_a^b c f(x) dx &= c \int_a^b f(x) dx \\ ii. \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx\end{aligned}$$

Para enunciar el siguiente problema necesitamos recordar el siguiente conjunto de números, el conjunto de los números racionales

$$\mathbb{Q} = \{m/n : m, n \in \mathbb{Z} \text{ con } n \neq 0\}$$

Teorema 8. (Regla de la potencia)

Si $r \in \mathbb{Q}$ y $r \neq -1$

$$\int_a^b x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} \Big|_a^b$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 (x^3 + 1)^2 dx &= \int_{-1}^2 x^6 + 2x^3 + 1 dx \\ &= \left(\frac{x^7}{7} + \frac{2}{4}x^4 + x \right) \Big|_{-1}^2 \\ &= \left[\frac{2^7}{7} + \frac{2}{2^2}2^4 + 2 \right] - \left[\frac{(-1)^7}{7} + \frac{2}{4}(-1)^4 + (-1) \right] \\ &= \frac{405}{14}\end{aligned}$$

Teorema 9. Si f es una función integrable en un intervalo cerrado $[a, b]$ y $a \leq c \leq b$ son tres números en el intervalo entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 |x|dx &= \int_{-2}^0 -x dx + \int_0^3 x dx \\ &= -\frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 \\ &= -\left(0 - \frac{(-2)^2}{2}\right) + \left(\frac{3^2}{2} - 0\right) \\ &= \frac{4}{2} + \frac{9}{2} = 13/2 \end{aligned}$$

El siguiente teorema es muy importante y relaciona la integral y la derivada de una función. En probabilidad se usa para verificar que la derivada de la función de distribución de una v.a. continua es la densidad, pero esto se tendrá que ver más adelante.

Teorema 10. Sea f continua en $[a, b]$. Si $a \leq c \leq b \Rightarrow \forall x \in [a, b]$

$$\frac{d}{dx} \int_c^x f(t)dt = f(x)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \int_2^x t^2 dt &= \frac{t^3}{3} \Big|_2^x = \frac{x^3}{3} - \frac{2^3}{3} \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} \int_2^x t^2 dt &= \frac{3x^2}{3} = x^2 \end{aligned}$$

Uno de los métodos más útiles para integrar viene dado por el siguiente:

Teorema 11. (Método de sustitución o cambio de variable)

$$\text{Si } u = g(x) \Rightarrow \int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Se está haciendo el cambio de variable

$$u = g(x) \Rightarrow du = g'(x)dx$$

Al hacer este cambio de variable, los límites de integración también cambian

$$x = a \Rightarrow g(x) = g(a) \Rightarrow u = g(a)$$

$$x = b \Rightarrow g(x) = g(b) \Rightarrow u = g(b)$$

Ejemplo:

$$\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}} dx = 3 \int_2^{10} \frac{1}{\sqrt{5x-1}} dx$$

Hacemos el cambio de variable

$$u = g(x) = 5x - 1 \Rightarrow du = 5dx$$

Por lo que cuando

$$x = 10 \Rightarrow u = 5(10) - 1 = 49$$

Y si

$$x = 2 \Rightarrow u = 5(2) - 1 = 9$$

Así, sustituyendo en la fórmula de cambio de variable y multiplicando por un $1 = \frac{5}{5}$ adecuado, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} \int_2^{10} \frac{1}{\sqrt{5x-1}} 5dx &= \frac{3}{5} \int_9^{49} \frac{1}{\sqrt{u}} du \\ &= \frac{3}{5} \int_9^{49} u^{-1/2} \\ &= \frac{3}{5} \left[2u^{1/2} \right]_9^{49} \\ &= \frac{6}{5} (7 - 3) \\ &= \frac{24}{5} \end{aligned}$$

2.4.1. Las Funciones Exponencial y Logarítmica

En esta sección definiremos las funciones logarítmica y exponencial. Estas funciones son muy importantes en estadística, pues se usan mucho, por lo que conviene saber algunas de sus propiedades básicas. Empecemos por enunciar el siguiente teorema que nos servirá para definir la función logaritmo.

Proposición 2. Si $c < d$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_c^d f(x) dx &= - \int_d^c f(x) dx \\ \Leftrightarrow \int_d^c f(x) dx &= - \int_c^d f(x) dx \end{aligned}$$

Definición (logaritmo natural):

La **función logaritmo natural**, denotado por $\ln$, se define por:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad \forall x > 0$$

Entonces, el logaritmo natural representa el área debajo de la función $1/t$ si $t > 1$, esto lo podemos ver en la siguiente gráfica.

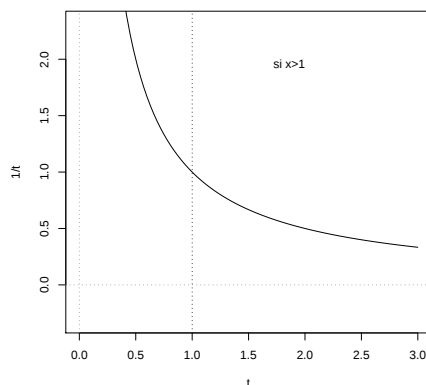


Figura 2.22: Área de la función $1/t$ si $t > 1$

Ahora, lo que pasa si $0 < t < 1$ es que $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = - \int_x^1 \frac{1}{t} dt$. Entonces calculamos el área debajo de $1/t$ de (x, t) (en este caso $x < t$) y la multiplicamos por un menos, es claro que el logaritmo de cualquier número menor a 1 siempre será negativo.

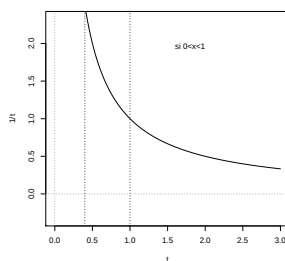


Figura 2.23: Área de la función $1/t$ si $0 < t < 1$

Si aplicamos el teorema que relaciona la integral con la derivada, tenemos que:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \Rightarrow \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

Entonces aplicando la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx} \ln(x^2) = \frac{1}{x^2} (2x) = \frac{2}{x}$$

Ahora con otra función

$$\frac{d}{dx} \ln(x^3 + 6x + 3) = \frac{1}{x^3 + 6x + 3} (3x^2 + 6)$$

Para deducir las propiedades más usadas de $\ln(x)$ necesitaremos el siguiente:

Teorema 12. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones tales que

$$f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow f(x) = g(x) + c$$

para algún número c y $\forall x \in [a, b]$.

Lo que quiere decir este teorema es que si la derivada de dos funciones es la misma en todo un intervalo cerrado, entonces las funciones sólo difieren en una constante en ese intervalo.

Ejemplo:

Sean $f(x) = 3x^2 + 276$ y $g(x) = 3x^2 + 6$ entonces $f'(x) = g'(x) = 6x$. Supongamos que no conocemos f y g sólo sus derivadas entonces por el teorema sabríamos que $f(x) = g(x) + c$ y de hecho en este caso sabemos que $c = 270$.

Teorema 13. (Propiedades de logaritmo) Si $p > 0$ y $q > 0$ entonces

$$i) \ln pq = \ln p + \ln q$$

$$ii) \ln p^r = r \ln p \quad \forall r \in \mathbb{Q} \left(r = \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right)$$

$$iii) \ln \frac{p}{q} = \ln p - \ln q$$

Prueba de *i*):

Tenemos que $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$ y que $\frac{d}{dx} \ln(px) = \frac{1}{px} p = \frac{1}{x}$

Entonces por el Teorema 12, $\ln(px) = \ln(x) + c \forall x > 0$

El resultado anterior es válido para toda $x > 0$, en particular es válido para $x = 1$, entonces sustituyendo $\ln(p) = \ln(1) + c$ pero $\ln(1) = 0$, entonces $\ln(p) = c$, así llegamos a que $\ln(px) = \ln(p) + \ln(x)$ y evaluando las funciones anteriores en q , tenemos el resultado deseado.

$$\ln(pq) = \ln(p) + \ln(q)$$

Definición (exponencial natural):

La **función exponencial natural** que se denota por $\exp$ es la función tal que

$$\ln(\exp x) = x \text{ y } \exp(\ln x) = x$$

Notación: $\exp(x) = e^x$

Últimas fórmulas para integrales

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln |b| - \ln |a|$$

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$$

Ejercicios

Calcula las siguientes integrales.

1.

$$\int_3^6 |x^2| dx$$

2.

$$\int_{-6}^5 |x - 3| dx$$

3.

$$\int_a^3 \frac{x^3 - x^2 + x}{x} dx$$

4.

$$\int_1^e \frac{x + 1}{x^2 + 2x} dx$$

5.

$$\int_{-5}^5 e^{5x} dx$$

Capítulo 3

Elementos del Álgebra de Matrices

En estadística, el álgebra de matrices es muy útil, especialmente en el estudio de modelos lineales y en el análisis multivariado. Algunos conceptos, tales como la salud del individuo, el crecimiento de una población, etc., no se pueden definir adecuadamente con una sola variable, por lo que se requiere un arreglo de varias dimensiones para lograr una descripción apropiada.

3.1. Conceptos Fundamentales

3.1.1. Vectores y Matrices

Definición (matriz):

Una **matriz** es un arreglo rectangular de elementos.

Definición (dimensión de una matriz):

Si una matriz tiene m renglones y n columnas se dice que es de **dimensión** $m \times n$.

La *componente ij -ésima de A* , denotada por a_{ij} , es el número que aparece en el i -ésimo renglón y la j -ésima columna de A . Indicaremos las matrices por las letras mayúsculas

itálicas. Entonces la matriz A de dimensión $m \times n$ se denota como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definición (matriz cuadrada):

Si A es una matriz de $m \times n$ con $m = n$, entonces A recibe el nombre de **matriz cuadrada**.

Definición (matriz nula):

Una matriz A de $m \times n$ en la que todas sus componentes son cero se llama **matriz cero** de $m \times n$ o **matriz nula**.

Definición (matriz diagonal):

Se dice que una matriz cuadrada es **diagonal** si todos los elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero.

Notación: en ocasiones las matrices se presentan entre corchetes en vez de paréntesis.

Definición (vector):

Un vector (columna) de n componentes es un conjunto ordenado de números y se escribe como

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

En otras palabras, un vector columna puede verse como una matriz $n \times 1$. Los vectores se denotan como $\mathbf{x}$ ó $\underline{x}$. La notación $\mathbf{x}$ supone un vector columna, mientras que el vector renglón está dado por el transpuesto de un vector columna $\mathbf{x}^t = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. (Ver Sección 1.1.2.)

La palabra “ordenado” que aparece en la definición de vector es esencial. Dos vectores cuyas componentes sean iguales pero escritas en distinto orden, **no** son iguales. La interpretación geométrica de un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ es un punto en el plano XY ($\mathbb{R}^2$).

Se puede calcular la magnitud de un vector de la siguiente manera. Si tenemos el vector $\mathbf{x}^t = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ entonces la magnitud de $\mathbf{x}$, que se denota por $L_{\mathbf{x}}$ se define como

$$L_{\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Un vector $\mathbf{x}$ es unitario si su magnitud es uno.

Ejemplos:

$$A_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a_{11} = 6 \\ a_{21} = 4 \\ a_{32} = -1 \\ a_{43} = -2 \end{matrix} \quad B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} b_{23} = 3 \\ b_{21} = -5 \end{matrix}$$

Los vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ son distintos:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad L_{\mathbf{x}} = L_{\mathbf{y}} = L_{\mathbf{z}} = \sqrt{55}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{matriz} \\ \text{cuadrada} \\ \text{simétrica} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{matriz} \\ \text{nula} \\ 3 \times 3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{matriz} \\ \text{identidad} \\ 3 \times 3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{matriz} \\ \text{diagonal} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{matriz} \\ \text{triangular} \\ \text{superior} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{matriz} \\ \text{triangular} \\ \text{inferior} \end{matrix}$$

3.1.2. Transpuesta

Definición (matriz transpuesta):

Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces la **transpuesta** de A , es la matriz de $n \times m$ que se obtiene al intercambiar los renglones y las columnas de A y se escribe $A^t = [a_{ji}]$.

La transpuesta de A se denota por A^t , A^T ó A' . Esquemáticamente,

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{entonces } A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En otras palabras, el i -ésimo renglón de A pasa a ser la i -ésima columna de A^t , y la j -ésima columna de A pasa a ser el j -ésimo renglón de A^t .

Propiedades: Supóngase que $A = [a_{ij}]$ es una matriz de $n \times m$ y que $B = [b_{ij}]$ es una matriz de $m \times p$. Entonces

1. $(A^t)^t = A$.
2. $(AB)^t = B^t A^t$.
3. Si A y B son de dimensión $n \times m$, entonces $(A + B)^t = A^t + B^t$.

Definición (matriz simétrica):

Se dice que una matriz cuadrada es **simétrica** si $A = A^t$, de manera que $a_{ij} = a_{ji}$ para toda i y para toda j .

Ejemplos:

▪

$$A = A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 0 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad A^t = A_{2 \times 3}^t = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 9 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

▪

$$B = B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 8 & -1 & 1 \\ 9 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B^t = B_{3 \times 3}^t = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- C y D son matrices simétricas

$$C = C_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad D = D_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

3.2. Operaciones de Matrices

3.2.1. Adición y Multiplicación

Adición de Matrices

Denotamos por A y B a dos matrices de $m \times n$ por $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$. Entonces la suma de A y B es la matriz $A + B$ de $m \times n$ dada por:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, $A + B$ es la matriz $m \times n$ que se obtiene al sumar las componentes correspondientes de A y B . La suma entre matrices se restringe a que ambas deben tener la misma dimensión.

Multiplicación de una Matriz por un Escalar

Si $A = [a_{ij}]$ es la matriz de $m \times n$ y si α es un escalar (número) entonces la matriz αA de $m \times n$ está dada por

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}] = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, αA es la matriz que se obtiene al multiplicar cada una de las componentes de A por α .

Propiedades

Sean A , B y C matrices de $m \times n$ y α un escalar. Entonces:

1. $A + \mathbf{0} = A$ ($\mathbf{0}$ es la matriz cero de $m \times n$).
2. $0A = \mathbf{0}$ (0 es el escalar 0).
3. $A + B = B + A$ (ley conmutativa).

4. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ley asociativa).

5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (ley distributiva).

Ejemplos:

Sean $\alpha = -2$ y 0 escalares, y las matrices A , B , C y $\mathbf{0}$ dadas por

$$A = A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = B_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C = C_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{0} = \mathbf{0}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■ $A + B$

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & -3 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

■ $A - B$

$$A - B = A + (-1)B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \\ 5 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}$$

■ $\mathbf{0}A^t$

$$\mathbf{0}A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■ A y C , y B y C no se pueden sumar porque tienen dimensión distinta.

■ αA

$$\alpha A = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -6 & 0 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$$

■ αC

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

3.2.2. Productos de Vectores y Matrices

Productos de Vectores

Sean $\mathbf{x}^t = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\mathbf{y}^t = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dos vectores de n componentes. El *producto punto* (o *producto interno*) de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, denotado por $\mathbf{x} * \mathbf{y}$, está dado por

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

El producto punto de dos vectores de n componentes es un escalar.

Propiedades

Sean $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ vectores de n componentes y α un escalar. Entonces:

1. $\mathbf{x} * \mathbf{0} = 0$.
2. $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{y} * \mathbf{x}$.
3. $\mathbf{x} * (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} * \mathbf{y} + \mathbf{x} * \mathbf{z}$.
4. $(\alpha\mathbf{x}) * \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} * \mathbf{y})$.

Productos de Matrices

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de $m \times n$ y $B = [b_{jk}]$ una matriz de $n \times p$. Entonces el producto de A y B es la matriz $C = [c_{ik}]$ de $m \times p$ tal que

$$c_{ik} = (i\text{-ésimo renglón de } A) * (k\text{-ésima columna de } B).$$

Dicho de otra manera, el elemento ik -ésimo de $C = AB$ es igual al producto del i -ésimo renglón de A y la k -ésima columna de B . Si se desarrolla se obtiene que

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}.$$

Dos matrices se pueden multiplicar sólo si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de renglones de la segunda. Cuando se multiplican dos matrices, es útil escribir su dimensión a manera de verificar que el número de renglones y columnas coincidan. Es decir,

$$AB = A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p} = C.$$

Nota: en general, el producto de matrices no es conmutativo, es decir, $AB \neq BA$.

Definición (matriz idempotente):

Sea A una matriz cuadrada, si $A^2 = AA = A$, entonces la matriz es *idempotente*.

Propiedades

1. $A(BC) = (AB)C$ (ley asociativa).
2. $A(B + C) = AB + AC$ y $(A + B)C = AC + BC$ (ley distributiva).

Ejemplos:

Sean

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} * \mathbf{y} = 9 \quad C_{3 \times 3} = AB = \begin{pmatrix} 42 & 0 & -14 \\ 0 & 9 & 3 \\ -7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad D_{2 \times 2} = BA = \begin{pmatrix} 45 & 19 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$$

3.2.3. Traza

La *traza* de una matriz cuadrada A de orden $n \times n$ es la suma de los términos de la diagonal, es decir

$$\text{traza}(A) = \text{traza}(A_{n \times n}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Propiedades

1. $\text{traza}(A^t) = \text{traza}(A)$.
2. $\text{traza}(cA) = c * \text{traza}(A)$.
3. $\text{traza}(A + B) = \text{traza}(A) + \text{traza}(B)$.
4. $\text{traza}(AB) = \text{traza}(BA)$
5. $\text{traza}(ABC) = \text{traza}(BCA) = \text{traza}(CAB)$.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{traza}(A) = 1 + 3 + 6 = 10$$

3.2.4. Determinantes

Sea A una matriz de 2×2 ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

el determinante de $A = A_{2 \times 2}$ se define como

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

El determinante de una matriz de orden $n \times n$ se definirá en forma inductiva como sigue:

Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$, el determinante de A es un escalar tal que

$$\det(A) = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

donde

$A_{ij} = (-1)^{i+j}$ * determinante de la matriz A sin el i -ésimo renglón y la j -ésima columna.

A_{ij} se conoce como la ij -ésima menor de A .

Para el caso de una matriz de A de 3×3 , el determinante es

$$\det(A_{3 \times 3}) = |A_{3 \times 3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ -a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} \end{matrix}.$$

Definición (matriz no singular):

Se dice que una matriz es **no singular** si su determinante es distinto de cero.

Propiedades

1. $|A| = |A^t|$.
2. $|AB| = |A||B|$.
3. $|AB| = |BA|$.
4. $|cA_{n \times n}| = c^n |A_{n \times n}|$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1) - (4)(-3) = 14$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 9 & 6 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = b_{11}B_{11} + b_{12}B_{12} + b_{13}B_{13}$$

$$B_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (1)[(9)(1) - (6)(-2)] = 9 + 12 = 21$$

$$B_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)[(2)(1) - (6)(-1)] = (-1)(2 + 6) = -8$$

$$B_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (1)[(2)(-2) - (9)(-1)] = -4 + 9 = 5$$

$$\Rightarrow |B| = 1(21) + 4(-8) + 0(5) = 21 - 32 = -11$$

3.2.5. Operaciones Elementales de Renglón

Las operaciones elementales por renglón son:

1. Multiplicar (o dividir) un renglón por (entre) un número distinto de cero.
2. Sumar el múltiplo de un renglón a otro renglón.
3. Intercambiar dos renglones.

El proceso de aplicar operaciones elementales de renglón con el propósito de simplificar una matriz aumentada se llama *reducción por renglones*.

La notación correspondiente a cada una de las operaciones elementales de renglón es como sigue:

1. $R_i \rightarrow cR_i$ significa “sustitúyase el i -ésimo renglón por el i -ésimo renglón multiplicado por c ”.
2. $R_j \rightarrow R_j + cR_i$ significa “sustitúyase el j -ésimo renglón por la suma del j -ésimo renglón y el i -ésimo renglón multiplicado por c ”.
3. $R_i \leftrightarrow R_j$ significa “intercámbiense los renglones i y j ”.

Una vez que se tiene la matriz escalonada reducida, ésta da la solución al sistema, proporcionando los valores de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} &\Rightarrow R_1 \rightarrow -2R_1 & A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\
 B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} &\Rightarrow R_1 \rightarrow R_1 + 2R_2 & B = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\
 C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow R_1 \leftrightarrow R_2 & C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3.2.6. Inversa de una Matriz Cuadrada

En primer lugar definiremos la matriz identidad.

Definición (matriz identidad):

La **matriz identidad** $\mathbf{I}_n$ de $n \times n$ es la matriz tal que los elementos de su diagonal principal son iguales a uno y los elementos que están fuera de la diagonal principal son iguales a cero, es decir,

$$\mathbf{I}_n = [b_{ij}] \quad \text{donde} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$, entonces,

$$A\mathbf{I}_n = A = \mathbf{I}_n A.$$

En otras palabras, $\mathbf{I}_n$ conmuta con toda matriz de $n \times n$ y las deja inalteradas de cada multiplicación por la derecha o por la izquierda.

Sean A y B matrices de $n \times n$. Supongamos que

$$AB = BA = \mathbf{I}_n,$$

entonces a B se le llama inversa de A , y se escribe como A^{-1} . Se tiene entonces que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{I}_n.$$

Si A tiene inversa, se dice que A es *invertible*.

Si una matriz cuadrada A es *invertible*, entonces su inversa es única.

Sean A y B matrices invertibles de $n \times n$, entonces AB es invertible y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Obtención de una Matriz Inversa

Sea A una matriz cuadrada de dimensión $n \times n$. Su inversa A^{-1} , se obtendrá de la siguiente manera:

1. Escribase

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

2. Aplicando operaciones por renglones a ambas matrices, se transformará la matriz A (a la izquierda) en la matriz identidad de orden $n \times n$. Debido a que las operaciones por renglones se aplicarán de manera simultánea a las dos matrices, la identidad (a la derecha) irá cambiando también.
3. A^{-1} será la matriz que quede al lado derecho ($\mathbf{I}$ originalmente) como resultado de transformar A en $\mathbf{I}$. Finalmente tendremos

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & & & & \end{array} \middle| A^{-1} \right)$$

Nota: Si la matriz A no es invertible, será imposible transformarla en la matriz identidad.

Ejemplos:

Sea A una matriz de 2×2 , deseamos obtener su matriz inversa, A^{-1} .

$$\left(\begin{array}{cc} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{array} \right)$$

escribimos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

el lado izquierdo debe transformarse en la matriz identidad $\mathbf{I}_{2 \times 2}$,

$$\Rightarrow R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow R_2 \rightarrow R_2 + 4R_1 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow R_2 \rightarrow -R_2 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow R_1 \rightarrow R_1 + \frac{3}{2}R_2 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

por lo tanto

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cc} -5/2 & -3/2 \\ -2 & -1 \end{array} \right)$$

3.2.7. Dependencia Lineal y Rango

Se dice que un conjunto de vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$ son *linealmente dependientes* si existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ las cuales no son todas iguales a cero, tales que

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0},$$

de lo contrario, se dice que los vectores son *linealmente independientes*.

Esta definición nos lleva a la idea de *rango* de una matriz, el cual se define como el número máximo de renglones que son linealmente independientes, o de manera equivalente, como el número máximo de columnas que son linealmente independientes. Si A es de orden $m \times n$, entonces el rango de A es tal que $\text{rango}(A) \leq \min(m, n)$. Encontramos que

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A^t) = \text{rango}(AA^t) = \text{rango}(A^t A).$$

Si A es una matriz cuadrada no singular de orden $n \times n$, entonces A es de rango completo n . Pero si A es singular, entonces los renglones y las columnas son linealmente dependientes y $\text{rango}(A) < n$.

Ejemplos:

Sean los vectores

$$\mathbf{x}^t = (1, 0, -1, 2), \quad \mathbf{y}^t = (4, 0, -4, 8), \quad \mathbf{z}^t = (6, 2, 2, 0)$$

entonces $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son linealmente dependientes porque $\mathbf{x} - 4\mathbf{y} = (0, 0, 0, 0)^t$; y los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{z}$ son linealmente independientes pues no existe un $\alpha \neq 0$ tal que $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{z} = (0, 0, 0, 0)^t$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{rango}(A) = 2 \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{rango}(B) = 3$$

3.2.8. Matrices Definidas y Semi-Definidas Positivas

Una matriz cuadrada A se llama:

- *definida positiva* si $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- *semidefinida positiva* si $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} \geq 0$ para todo $\mathbf{x}$.

Si A es definida positiva, entonces también es semidefinida positiva.

Ejemplos:

- A no es semidefinida positiva ni definida positiva, porque existe un $\mathbf{x} \neq (0, 0)^t$ tal que $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} < 0$. Sea $\mathbf{x} = (2, -1)^t$, entonces $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = -3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + 5x_2)(x_1 + x_2)$$

- B es semidefinida positiva porque $\mathbf{x}^t B \mathbf{x} = (x_1 + 3x_2)^2 \geq 0$ para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^t B \mathbf{x} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 = (x_1 + 3x_2)^2$$

- C es definida positiva porque $\mathbf{x}^t C \mathbf{x} = x_1^2 + 4x_2^2 > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq (0, 0)^t$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^t C \mathbf{x} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_2^2$$

3.3. Sistemas de Ecuaciones Lineales**3.3.1. Transformaciones Lineales**

Si el dominio de una función T es $\mathbb{R}^n$ y su contradominio es $\mathbb{R}^m$, entonces a T se le conoce como *transformación* de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, y se denota como $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se define por ecuaciones de la forma

$$\begin{array}{ccccccccc} w_1 & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ w_2 & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ w_m & = & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n \end{array}$$

En notación matricial se tiene que $W = AX$. La matriz A se conoce como la matriz estándar para la transformación T

Ejemplos

- Las ecuaciones

$$\begin{array}{lcl} w_1 & = & x_1 + x_2 \\ w_2 & = & 3x_1x_2 \\ w_3 & = & x_1^2 + x_2^2 \end{array}$$

define una transformación $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde

$$T(x_1, x_2) = (w_1, w_2, w_3) = (x_1 + x_2, 3x_1x_2, x_1^2 + x_2^2)$$

entonces si $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$, entonces

$$T(1, -2) = (w_1, w_2, w_3) = (1 - 2, 3(1)(-2), 1^2 + (-2)^2) = (-1, -6, 5)$$

- La transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por las ecuaciones

$$w_1 = 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4$$

$$w_2 = 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4$$

$$w_3 = 5x_1 - x_2 + 4x_3$$

se puede expresar en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

3.3.2. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales se utilizarán para encontrar valores propios (ver Sección 1.4) y se pueden utilizar también para obtener la inversa de una matriz cuadrada. Aquí se muestra cómo resolver estos sistemas utilizando el método de eliminación de Gauss.

Tenemos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas de la forma:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & z_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & z_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & z_n \end{array}$$

El primer paso para resolver este sistema de ecuaciones es escribir el sistema como una *matriz aumentada*, la cual tiene la siguiente forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & z_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & z_n \end{array} \right)$$

La idea es convertir esta matriz en una matriz escalonada reducida por renglones, que tendría la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} & c_1 \\ 0 & 1 & b_{23} & \cdots & b_{2n} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & b_{2n} & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_n \end{array} \right)$$

La manera de conseguir esto es realizando operaciones elementales de renglón sobre la matriz aumentada.

Ejemplos:

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 18 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 24 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

La matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

necesitamos reducirla a la forma escalonada,

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1 \quad & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array} \right) \\ \Rightarrow R_2 \rightarrow -\frac{1}{3}R_2 \quad & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array} \right) \Rightarrow R_3 \rightarrow R_3 + 5R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \\ \Rightarrow R_3 \rightarrow -R_3 \quad & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

para obtener los valores de x_1 , x_2 y x_3 debemos resolver las ecuaciones implícitas en la matriz escalonada.

Por R_3 obtenemos que $x_3 = 3$.

En R_2 tenemos la ecuación $x_2 + 2x_3 = 4$, dado que ya conocemos el valor de x_3 , entonces $x_2 + 2(3) = 4$, por lo tanto $x_2 = -2$.

En R_1 tenemos la ecuación $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$, dado que ya conocemos x_2 y x_3 , entonces $x_1 + 2(-2) + 3(3) = 9$, implica que $x_1 = 4$.

3.4. Raíces y Vectores Propios

Vectores paralelos: dos vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son paralelos si el ángulo entre ellos es cero o π (es decir, 180°). Pueden tener direcciones iguales u opuestas. Si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ para alguna constante $\alpha \neq 0$ si y sólo si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son paralelos.

Valor y vector propio, o *valor y vector característico*, o *eigen valor y eigen vector*. Sea A una matriz $p \times p$. El número λ recibe el nombre de valor propio de A si existe algún vector diferente de cero $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^p$ tal que

$$A\mathbf{c} = \lambda\mathbf{c}.$$

En este caso se dice que el vector $\mathbf{c}$ es el vector propio (o vector característico o eigen vector) de A correspondiente al valor propio (o valor característico o eigen valor) λ .

Geométricamente, lo que hace el vector propio $\mathbf{c}$ al multiplicar a la matriz A es crear un nuevo vector que es paralelo al mismo vector propio $\mathbf{c}$.

Sea A una matriz de $p \times p$, entonces λ es un valor propio de A si y sólo si

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

donde $p(\lambda)$ es un polinomio de λ de grado p , y es conocido como *polinomio característico* de A .

Las raíces de $p(\lambda)$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, son los valores propios de A . Toda matriz de orden $p \times p$ tiene exactamente p valores propios.

A cada valor propio λ_i le corresponde un vector propio $\mathbf{c}_i$ tal que

$$A\mathbf{c}_i = \lambda_i \mathbf{c}_i.$$

Los vectores propios no son únicos ya que contienen un factor de escala arbitrario. Por consiguiente, con frecuencia se les normaliza de manera que $\mathbf{c}^t \mathbf{c} = 1$. Cuando haya valores propios iguales (raíces repetidas de $p(\lambda)$), los vectores propios correspondientes se elegirán de manera que sean ortogonales.

Procedimientos para calcular valores y vectores propios

1. Encontrar $p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{I})$.
2. Calcular las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ de $p(\lambda) = 0$.
3. Resolver el sistema homogéneo $(A - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{c}_i = \mathbf{0}$ que corresponde a cada valor característico de λ_i .

Propiedades útiles

Sea A una matriz de orden $p \times p$. Entonces

1. $\sum_{i=1}^p \lambda_i = \text{traza}(A)$.
2. $|A| = \det(A) = \prod_{i=1}^p \lambda_i = \lambda_1 * \lambda_2 * \dots * \lambda_p$.
3. Si A es una matriz de número reales simétrica, entonces sus valores propios y vectores propios son reales.
4. Si A es definida positiva, entonces todos los valores propios son estrictamente positivos.

si queremos que el vector este normalizado, entonces pedimos que $\mathbf{c}_1^t \mathbf{c}_1 = 1$ y por lo tanto el vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 1$ es

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{18} \\ -4/\sqrt{18} \\ -1/\sqrt{18} \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = -2$,

$$(A - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{c}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

este es un sistema de ecuaciones homogéneo, lo resolvemos a través del método de eliminación de Gauss, usando su matriz aumentada correspondiente,

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & | & 0 \\ 3 & 4 & -1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 + 4R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & | & 0 \\ 15 & 0 & 15 & | & 0 \\ 5 & 0 & 5 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R_2 \rightarrow \frac{1}{15}R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 5 & 0 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} R_1 \rightarrow R_1 - 4R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 5R_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto el sistema es

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_1 \\ x_3 &= -x_1 \end{aligned}$$

una solución sería

$$\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

si queremos que el vector este normalizado, entonces pedimos que $\mathbf{c}_2^t \mathbf{c}_2 = 1$ y por lo tanto el vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = -2$ es

$$\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_3 = 3$,

$$(A - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{c}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

este es un sistema de ecuaciones homogéneo, lo resolvemos a través del método de eliminación de Gauss, usando su matriz aumentada correspondiente,

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 & | & 0 \\ 3 & -1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 1 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1 \end{array} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 & | & 0 \\ 5 & 0 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R_2 \rightarrow \frac{1}{5}R_2 \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R_1 \rightarrow R_1 + 2R_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto el sistema es

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= 2x_3 \end{aligned}$$

una solución sería

$$\mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si queremos que el vector este normalizado, entonces pedimos que $\mathbf{c}_3^t \mathbf{c}_3 = 1$ y por lo tanto el vector propio asociado al valor propio $\lambda_3 = 3$ es

$$\mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Descomposición Espectral

El cálculo de los valores y vectores propios es un aspecto muy importante del análisis de matrices. La *descomposición espectral* relaciona la estructura de una matriz simétrica con sus respectivos valores y vectores propios.

Toda matriz simétrica A de orden $p \times p$ puede escribirse como

$$A = \mathbf{C} \Lambda \mathbf{C}^t = \sum_{j=1}^p \lambda_j \mathbf{c}_j \mathbf{c}_j^t,$$

donde $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ y donde

$$\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_p]$$

es una matriz ortogonal cuyas columnas son los correspondientes vectores propios de la matriz A .

Ejemplo:

Consideremos la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Puede demostrarse que los valores propios de D son $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 3$, mientras que los vectores propios (normalizados) son $\mathbf{c}_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^t$ y $\mathbf{c}_2 = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^t$ respectivamente.

Entonces

$$A = \mathbf{C} \Lambda \mathbf{C}^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.5. Ejercicios

Considera las siguientes matrices y vectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w} = (1 \ 2 \ 3 \ 4) \quad \mathbf{x} = (1 \ -1 \ 1 \ -1) \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Realiza las siguientes operaciones:

- $A + B$, $A^t + B^t$, $C + D$, $C^t + D^t$, $(C + D)^t$.
- AB , $B^t A^t = (AB)^t$, CD , $C^t D^t = (DC)^t$, $CD^t = (DC^t)^t$.
- $\mathbf{wy}$, $\mathbf{yw}$, $\mathbf{w} * \mathbf{x} = \mathbf{x} * \mathbf{w}$, $\mathbf{xz}$, $\mathbf{zw}$.
- Calcula la magnitud de los vectores $\mathbf{w}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$.
- $\text{traza}(A) = \text{traza}(A^t)$, $\text{traza}(B) = \text{traza}(B^t)$, $\text{traza}(A + B) = \text{traza}(A) + \text{traza}(B)$, $\text{traza}(CD) = \text{traza}(DC) = \text{traza}(D^t C^t) = \text{traza}(C^t D^t)$, $\text{traza}(CD^t) = \text{traza}(D^t C) = \text{traza}(DC^t) = \text{traza}(C^t D)$.
- Calcula los determinantes de las matrices A , B , C y D .
- Indica si las matrices A , B , C y D son: cuadrada, nula, diagonal, simétrica, idempotente, no singular.
- Calcula la inversa de las matrices A , B , C y D , indicando las operaciones por renglones en cada uno de los pasos.

- Calcula el rango de las matrices A , B , C y D .
- Determina si las matrices A , B , C y D son definidas positivas, semidefinidas positivas o no lo son.
- Calcula los valores propios y sus correspondientes vectores propios de las matrices A , B , C y D .

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 23 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ -4x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = -13 \end{cases}$$

Apéndice A

Solución de Ejercicios

A.1. Solución de los ejercicios de Álgebra

Ejercicios de la sección 1.1.4

1. Diga cuál propiedad se ha usado en los siguientes enunciados:

- a) $4 + 5 = 5 + 4$ conmutatividad en la adición
- b) $0 + 8 = 8$ neutro aditivo
- c) $(-xy) + xy = 0$ inverso aditivo
- d) $\frac{1}{x+2y}(x+2y) = 1$ inverso multiplicativo
- e) $x + y = 1(x) + 1(y)$ neutro multiplicativo

2. Encuentre el inverso aditivo y multiplicativo de los siguientes números:

- a) $\frac{2x}{5y} \Rightarrow$ inverso aditivo $-\frac{2x}{5y}$, inverso multiplicativo $\frac{5y}{2x}$
- b) $-\frac{3a}{2b} \Rightarrow$ inverso aditivo $\frac{3a}{2b}$, inverso multiplicativo $-\frac{2b}{3a}$
- c) $-\frac{5}{c} \Rightarrow$ inverso aditivo $\frac{5}{c}$, inverso multiplicativo $-\frac{c}{5}$
- d) $(3x+z) \Rightarrow$ inverso aditivo $-(3x+z)$, inverso multiplicativo $\frac{1}{3x+z}$

3. Resuelva lo siguiente:

- a) Suponiendo que $d \neq 0$, dé el valor de x si:
 - 1) $dx = d \Rightarrow x = 1$
 - 2) $d + x = d \Rightarrow x = 0$

$$3) \frac{1}{d}(x) = 1 \Rightarrow x = d$$

b) Muestre que los siguientes enunciados son ciertos:

- 1) $(b + 7) + z = 7 + (z + b) \Rightarrow (b + 7) + z = (7 + b) + z$ conmutatividad en la adición; $= 7 + (b + z)$ asociatividad en la adición; $= 7 + (z + b)$ conmutatividad en la adición.
- 2) $(b + c + d)a = ab + ac + ad \Rightarrow (b + c + d)a = a(b + c + d)$ conmutatividad en la multiplicación; $ab + ac + ad$ distributiva.
- 3) $-a + (b + a) = b \Rightarrow -a + (b + a) = -a + (a + b)$ conmutatividad en la adición; $= (-a + a) + b$ asociatividad en la adición; $= 0 + b$ inverso aditivo; $= b$ neutro aditivo.

4. Demuestre que $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a(b - c) = ab - ac$, y en cada paso anote la propiedad o definición que se usó. $\Rightarrow a(b - c) = a(b + (-c))$ definición; $= ab + a(-c)$ distributiva; $= ab + a(-1c)$ neutro multiplicativo; $= ab + [a(-1)]c$ asociatividad en la multiplicación; $= ab + [(-1)a]c$ conmutatividad en la multiplicación; $= ab + (-1)(ac)$ asociatividad en la multiplicación; $= ab - 1(ac)$ definición; $= ab - ac$ neutro multiplicativo.

Ejercicios de la sección 1.1.5

- Exponentes. Simplifica cada expresión realizando las operaciones correspondientes y dejando el resultado sin exponentes negativos o nulos.

1. $(3xy^3)(3xy)^{-2} = \frac{y}{3x}$
2. $(z^3w^{-2})^{-1}(z^2w^0)^2 = zw^2$
3. $(ab^{-3})(a^{-1}b^{-1})^{-1} = \frac{a^2}{b^2}$
4. $\frac{2^{-1} + 3^{-1}}{2^{-1}} = \frac{2 + 3}{3}$
5. $\left(\frac{7x^3}{3yz}\right)^2 \left(\frac{z}{7x^2}\right)^2 = \frac{x^2}{3^2y^2}$
6. $\left(\frac{p^3q^0}{r^2}\right)^{-1} = \frac{r^2}{p^3}$
7. $\frac{2^{-1} + 1^{-1}}{2^{-1} - 1^{-1}} = -3$

- Radicales.

1. $\sqrt[2]{49x^2y^4} = 7xy^2$
2. $\sqrt[3]{-\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}}$

$$3. \sqrt[3]{64x^4y^5} = 4xy\sqrt[3]{xy^2}$$

$$4. \sqrt{\frac{2}{3x^3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3x}\sqrt{x}}$$

$$5. \sqrt[6]{81x^8y^4} = \sqrt[3]{3^2}x\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y^2}$$

$$6. \sqrt[4]{\frac{25x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{5x}}{\sqrt{y}}$$

$$7. \sqrt[4]{\frac{x^2+4x+4}{4x^2}} = \sqrt{\frac{x+2}{2x}}$$

Opcionales:

- Si $2^a = 10$ y $5^b = 10$. ¿Cuánto vale $\frac{1}{a}\frac{1}{b}$? $\Rightarrow a = \log_2 10 \approx 3.321928$, $b = \log_5 10 \approx 1.430677$

- Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, es decir, $x, y, z > 0$ si $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y}$ ¿cuánto vale $\frac{x}{y}$?

Ayuda: si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \forall a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

$$\frac{x}{y} = \frac{(y) + (x+y) + (x)}{(x-z) + (z) + (y)} = \frac{2(x+y)}{x+y} = 2$$

Ejercicios de la sección 1.2

Calcular las siguientes expresiones siendo:

$$x = -1, y = 3, z = 2, a = 1/2, b = -2/3$$

$$1. 4x^3y^2 - 3xyz^2 = 0$$

$$2. (x-y)(y-z)(z-x) = -12$$

$$3. \frac{xy^2 - 3z}{a+b} = 90$$

$$4. \frac{(x-y)^2 + 2z}{ax+by} = -8$$

$$5. \frac{(x-1)(y-1)(z-1)}{(a-1)(b-1)} = -4.8$$

Ejercicios de la sección 1.2.1

Efectuar los productos siguientes e indicar el número de fórmula o propiedad que se está utilizando:

1. $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1) = x^6 - 1$
2. $(3y + x)(81y^2 - 27y^3x + 9y^2x^2 - 3yx^3 + x^4) = 243y^5 + x^5$
3. $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c) = [(a + b)^2 - c^2][(a - b)^2 - c^2]$
4. $(9a + b)(a - 2b) = 9a^2 - 17ab - 2b^2$
5. $(2w + 3u)^3 = 8w^3 + 12w^2u + 18wu^2 + 27u^3$
6. $(x^2 - y^3 + 3c)^2 = x^4 + y^6 + 9c^2 - 2x^2y^3 + 6x^2c - 6y^3c$
7. $(e^y + 1)(e^y - 1) = e^{2y} - 1$

Ejercicios de la sección 1.2.2

Descomponer en factores indicando que tipo de factorización es o el nombre de la fórmula que se está utilizando:

1. $3a^2y^2 + 6a^3b^3 = 3a^2(y^2 + 2ab^3)$
2. $(4a + b)^2 - (2b - c)^2 = (4a - b + c)(4a + 3b - c)$
3. $5w^3 - 3w^2 - 2w = w(5w + 2)(w - 1)$
4. $z^3 + 27 = (z + 3)(z^2 - 3z + 3^2)$
5. $8z^6 + 7z^3 - 1 = (8z^3 - 1)(z^3 + 1)$
6. $(u^2 - v^2)^2 + 8(u^2 - v^2) + 16 = [(u + v)(u - v) + 4]^2$
7. $a^{2n+4} + 5a^{n+4} - 50a^4 = a^4(a^n + 10)(a^n - 5)$

Ejercicios de la sección 1.2.3

Resuelve los siguientes ejercicios.

1. $2x + \frac{3}{2} = 7\left(x - \frac{5}{3}\right) + 1 \Rightarrow x = \frac{73}{30}$
2. ¿Para qué valor de d el número a es una solución en las siguientes ecuaciones?
 - $6x + 3d = 2d + x + 12$ si $a = 3 \Rightarrow d = -3$

- $3d + x = x + d + 23 \Rightarrow d = \frac{23}{2}$
- 3. $x^2 - x - 6 = 3 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}$
- 4. $x^2 + 5x + 14 = 8 \Rightarrow x = -2, x = -3$
- 5. $x^3 - 22 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{22}$

Ejercicios de la sección 1.2.4

1. Demuestra: $|a - b| \leq |a| + |b|$
 $|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$ ¿Para qué valores de x se cumplen las siguientes desigualdades?
2. $3x + 32 \leq 2x + 3(4 - x) \Rightarrow x \leq -5$
3. $5x + 4 < x < 7 + x \Rightarrow x < -1$
4. $|x + 4| = 20 \Rightarrow x = 16 \text{ ó } x = -24$
5. $|6 + 8x| \geq 31 \Rightarrow x \leq -\frac{37}{8} \text{ ó } x \geq \frac{25}{8}$
6. $x^2 + 2x + 1 \leq 0$. Grafica el resultado. $\Rightarrow x = -1$

Ejercicios de la sección 1.2.5

Hay ejercicios que tienen solución única, mientras que otros tienen una infinidad de soluciones y otros simplemente no tienen solución.

1.

$$\begin{array}{rcl} 2x & + & y = 3 \\ -2x & + & y = -3 \end{array} \quad x = \frac{3}{2}, y = 0$$
2.

$$\begin{array}{rcl} -5x & + & y = 5 \\ -5x & + & y = -7 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{No hay solución} \\ \text{rectas paralelas} \end{array}$$
3.

$$\begin{array}{rcl} -12x & + & 4y = -16 \\ 9x & - & 3y = 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Infinidad de soluciones} \\ \text{rectas iguales} \end{array}$$
4.

$$\begin{array}{rcl} 3x & + & 5y + 2z = 3 \\ 2x & - & 3y + z = 4 \\ -5x & - & 6y - 3z = 5 \end{array} \quad x = -28, y = -3, z = 51$$

5.

$$\begin{array}{rrrrrr} 4x & + & 3y & + & z & = & -2 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ -8x & - & 6y & - & 2z & = & 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Infinidad de soluciones} \\ 3x + 4y = -3 \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ -5x & - & 5y & - & 5z & = & 1 \\ 8x & + & 8y & + & 8z & = & -8 \end{array} \quad \text{No hay solución}$$

Ejercicios de la sección 1.2.6

1.

La *serie armónica* es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Calcula el valor de la serie armónica para los primeros 7 términos.

$$\sum_{n=1}^7 \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \approx 2.592857$$

2. Una *serie geométrica* es una serie en la cual cada término se obtiene multiplicando el anterior por una constante. Por ejemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^i} + \cdots$$

Calcula en la serie geométrica siguiente los primeros diez términos.

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{5^j}$$

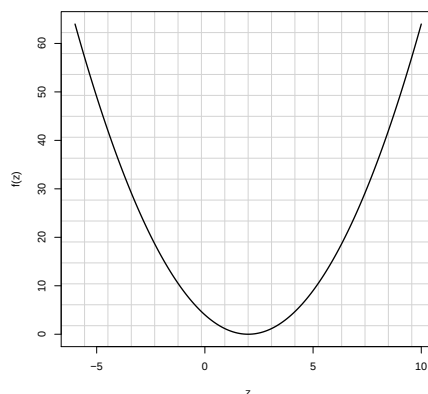
$$\sum_{j=0}^{10} \frac{1}{5^j} = \frac{1}{5^0} + \frac{1}{5^1} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{5^9} \approx 1.25$$

3.

Demuestra que: $\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^j i = \sum_{j=1}^s \frac{j(j+1)}{2}$

Y calcula los primeros cinco términos.

$$\sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^j i = \sum_{j=1}^5 \frac{j(j+1)}{2} = 35$$

Figura A.1: Solución gráfica $f(z) = (z - 2)^2$

4. Una *serie alternada* es aquella donde los términos alternan el signo. Calcula los ocho primeros términos de la serie alternada.

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{i=1}^8 (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \approx 0.6345238$$

A.2. Solución de los ejercicios de Cálculo

Ejercicios de la sección 2.1

1. Encuentra el dominio y el rango de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{x}$, Dominio $\mathbb{R} - \{0\}$, Rango $\mathbb{R}$

b) $h(x) = 5x - 3x^5 + 53$, Dominio $\mathbb{R}$, Rango $\mathbb{R}$

c) $g(x) = \sqrt{6x - 2}$, Dominio $[\frac{1}{3}, \infty)$, Rango $[0, \infty)$

2. Gráfica las siguientes funciones haciendo uso de una tabla donde se representen los valores del dominio y rango.

a) $f(z) = (z - 2)^2$ (ver figura A.1)

b) $h(w) = \frac{2}{w^2}$ (ver figura A.2)

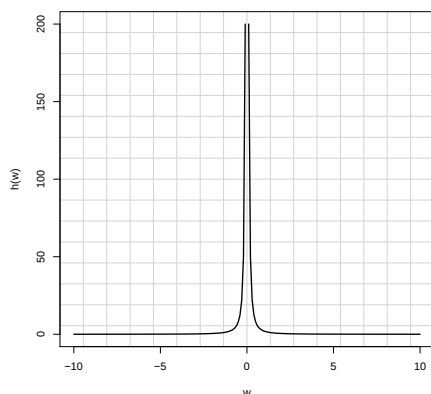


Figura A.2: Solución gráfica $h(w) = \frac{2}{w^2}$

Ejercicios de la sección 2.2.2

1. Calcula los siguientes límites.

a)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = 0$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} = 4$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

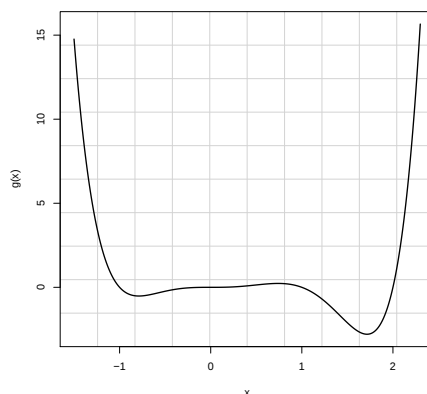
2. Diga si la siguiente función es continua y en caso afirmativo diga en dónde. $g(x) =$

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ 35^2 & \text{si } x = -1 \end{cases} \quad \text{Es continua en } (-\infty, -1) \cup (-1, \infty) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

3. Encuentra los valores para los cuáles $g(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 2x^3$ es $g(x) < 0$ y $g(x) > 0$

Ver figura A.3. Ceros de la función $g(x) = 0$:

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Figura A.3: Solución gráfica $g(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 2x^3$

Entonces

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -1) & \text{Positiva} \\ x \in (-1, 0) & \text{Negativa} \\ x \in (0, 1) & \text{Positiva} \\ x \in (1, 2) & \text{Negativa} \\ x \in (2, \infty) & \text{Positiva} \end{cases}$$

Ejercicios de la sección 2.3.1

1. Obtén la recta tangente en $(2, f(2))$ donde $f(x) = (x-1)^2 \Rightarrow y = 2x - 3$
2. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $g(x) = 2x^3(\sqrt{x}) \Rightarrow g'(x) = 7x^2\sqrt{x}$

b) $h(x) = \frac{3x^5 + 2x^3}{7x^3 - x^2} \Rightarrow h'(x) = \frac{42x^7 - 9x^6 - 2x^4}{(7x^3 - x^2)^2}$

c) $q(x) = \left(\sqrt[3]{x^2 + 2}\right)^2 \Rightarrow q'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 + 2}}$

d) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ [Si $f(x) = \sin(x)$ entonces $f'(x) = \cos(x)$]

Ejercicios de la sección 2.3.2

Gráfica las siguientes funciones haciendo uso del criterio de la primera y segunda derivada, así también verificando dónde la función es cóncava hacia arriba y hacia abajo,

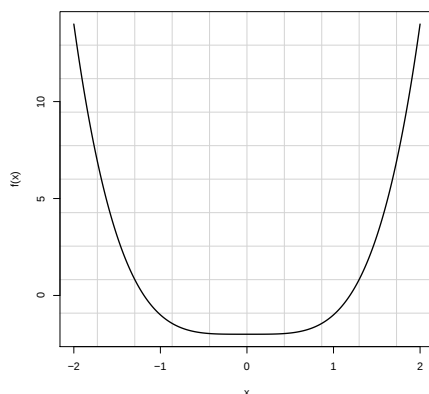


Figura A.4: Solución gráfica $f(x) = x^4 - 2$

los puntos de inflexión, las raíces de la función.

- i. $f(x) = x^4 - 2$ (ver figura A.4)
- ii. $g(x) = x^3 - x^2 - 2x$ (ver figura A.5)
- iii. $h(x) = x^5 + x^3$ (ver figura A.6)

Ejercicios de la sección 2.4.1

Calcula las siguientes integrales.

1.

$$\int_3^6 |x^2| dx = 63$$

2.

$$\int_{-6}^5 |x - 3| dx = 42.5$$

3.

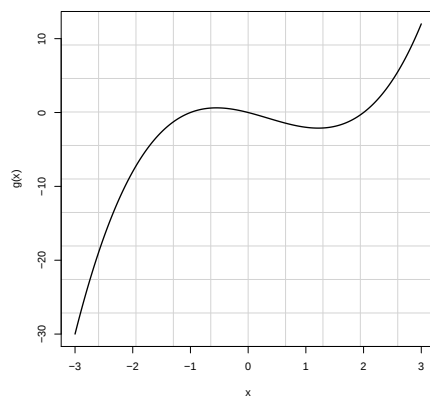
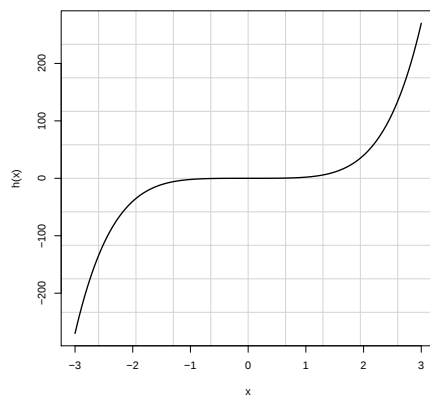
$$\int_a^3 \frac{x^3 - x^2 + x}{x} dx = 7.5 - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} - a$$

4.

$$\int_1^e \frac{x+1}{x^2+2x} dx = \frac{1}{2} \log(e^2 + 2e) - \frac{1}{2} \log(3)$$

5.

$$\int_{-5}^5 e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{25} - \frac{1}{5} e^{-25}$$

Figura A.5: Solución gráfica $g(x) = x^3 - x^2 - 2x$ Figura A.6: Solución gráfica $h(x) = x^5 + x^3$

A.3. Solución de los ejercicios de Álgebra de Matrices

Ejercicios de la sección 3.5

Considera las siguientes matrices y vectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w} = (1 \ 2 \ 3 \ 4) \quad \mathbf{x} = (1 \ -1 \ 1 \ -1) \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Realiza las siguientes operaciones:

$$\blacksquare A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, A^t + B^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, C + D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, C^t + D^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, (C + D)^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\blacksquare AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, B^t A^t = (AB)^t = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, CD = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, C^t D^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, CD^t = (DC^t)^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\blacksquare \mathbf{w}\mathbf{y} = (5), \mathbf{y}\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{w} * \mathbf{x} = \mathbf{x} * \mathbf{w} = (-2), \mathbf{x}\mathbf{z} = (1),$$

$$\mathbf{z}\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{pmatrix}.$$

- Calcula la magnitud de los vectores $\mathbf{w}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$. $L_{\mathbf{w}} \approx 5.477$, $L_{\mathbf{x}} = 2$, $L_{\mathbf{y}} = 3$, $L_{\mathbf{z}} = 5.91608$.
- $\text{traza}(A) = \text{traza}(A^t) = 2$, $\text{traza}(B) = \text{traza}(B^t) = 4$, $\text{traza}(A + B) = \text{traza}(A) + \text{traza}(B) = 6$, $\text{traza}(CD) = \text{traza}(DC) = \text{traza}(D^t C^t) = \text{traza}(C^t D^t) = 7$, $\text{traza}(CD^t) = \text{traza}(D^t C) = \text{traza}(DC^t) = \text{traza}(C^t D) = 6$.

- Calcula los determinantes de las matrices A , B , C y D . $|A| = -3$, $|B| = 5$, $|C| = 1$, $|D| = 1$
- Indica si las matrices A , B , C y D son: cuadrada, nula, diagonal, simétrica, idempotente, no singular. A matriz 2×2 cuadrada, simétrica, no singular; B matriz 2×2 cuadrada, no singular; C matriz 3×3 cuadrada, no singular; D matriz 3×3 cuadrada, no singular.
- Calcula la inversa de las matrices A , B , C y D , indicando las operaciones por renglones en cada uno de los pasos. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$,
 $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,
- Calcula el rango de las matrices A , B , C y D . $\text{rango}(A) = 2$, $\text{rango}(B) = 2$, $\text{rango}(C) = 3$, $\text{rango}(D) = 3$.
- Determina si las matrices A , B , C y D son definidas positivas, semidefinidas positivas o no lo son. A no es semidefinida positiva; B , C y D son definidas positivas.
- Calcula los valores propios y sus correspondientes vectores propios de las matrices A , B , C y D .
 A : valores propios $\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$, vectores propios $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$
 B : valores propios $\begin{pmatrix} 2+i & 2-i \end{pmatrix}$, vectores propios $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$
 C : valores propios $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, vectores propios $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2.22044 \times 10^{-16} \end{pmatrix}$
 D : valores propios $\begin{pmatrix} 4.365 & 0.317 + 0.358i & 0.317 - 0.358i \end{pmatrix}$,
vectores propios $\begin{pmatrix} 0.267 & 0.710 & 0.710 \\ 0.346 & -0.105 - 0.428i & -0.105 + 0.428i \\ 0.899 & -0.485 + 0.254i & -0.485 - 0.254i \end{pmatrix}$

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 23 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -6 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 1.375 \\ x_2 = 2.15 \\ x_3 = 3.075 \end{matrix} \quad \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ -4x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = -13 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = -1 \end{matrix}$$

Bibliografía

- [1] Arizmendi, H., Carrillo, A., y Lara, M. *Cálculo*, Ed. SITESA.
- [2] Cárdenas, H., Lluís, E., Raggi, F., y Tomás, F. *Álgebra Superior*, Ed. Trillas.
- [3] Swokoski, Earl W., Cole, Jeffery A. *Álgebra y Trigonometría*, Ed. Thompson, 11 Edición.
- [4] Swokoski, Earl W. *Cálculo con Geometría Analítica*, Grupo Editorial Iberoamérica., 2 Edición.
- [5] Spivak, Michael. *Calculus: cálculo infinitesimal*, Editorial Reverte., 2 Edición.
- [6] Swokoski, Earl W. *Álgebra Universitaria*, Editorial CECSA.
- [7] Stewart, James. *Calculus: Early Transcendentals*, McMASTER UNIVERSITY, Six Edition.