# Curso Propedéutico para la Especialización en Estadística Aplicada

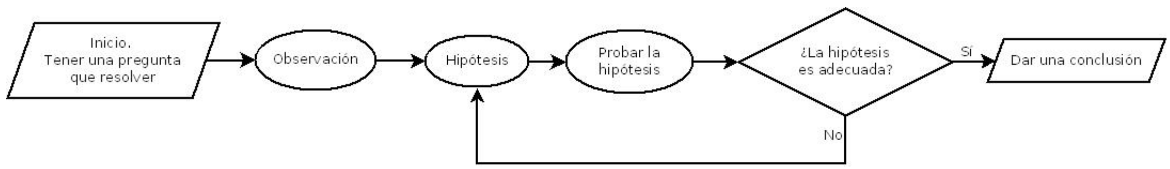
## Estadística

Miguel Ángel Chong Rodríguez

miguel@sigma.iimas.unam.mx

# Introducción

Una característica del humano es tratar de interpretar los fenómenos que lo rodean, aprender del mundo a partir de lo que se observa y de su experiencia a lo largo del tiempo. A partir de estas experiencias uno aprende a hacer deducciones útiles del mundo en que vive. No en valde parte de método científico tiene como parte fundamental la observación.




Hay una gran variedad de fenómenos que quisieramos describir, pero podemos empezar por clasificarlos entre fenómenos deterministas y fenómenos aleatorios.

Un **fenómeno determinista** es aquel que, cuando se reproduce en las mismas condiciones, podemos predecir con certeza cuál va a ser el resultado, en otras palabras se rige bajo leyes causales. Este tipo de fenómenos no son parte de nuestro estudio.

Por otro lado, el **fenómeno aleatorio** es el que cada vez que se realiza, aun bajo condiciones *casi* idénticas, el resultado no se conoce con certeza, además que el resultado sólo se sabe después de realizado el experimento.

Las herramientas con la que contamos para estudiar los fenómenos aleatorios son:

1. la probabilidad
    (a) Grado de confianza o fundada apariencia de que algo suceda.
    (b) En los juegos o probabilidad clásica, es la razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.
    (c) y su formalización basada en planteamiento axiomático de Kolmogorov en 1933.
2. y la estadística.
    (a) que es el estudio de los datos cuantitativos de la población, además que
    (b) es la rama de la matemática que utiliza grandes conjuntos de datos numéricos para obtener inferencias basadas en el cálculo de probabilidades.
    (c) la estadística clásica o frecuentista se basa en la **regularidad estadística**, es decir que, al repetir un fenómeno aleatorio un número grande de veces en condiciones *constantes*, las proporciones en las que ocurren los posibles resultados son muy estables.
    (d) la estadística subjetiva o Bayesiana que incorpora el conocimiento que tiene el individuo sobre el fenómeno aleatorio.

## Concepto de medición y de variable

Para cuantificar o clasificar lo que percibimos de un fenómeno aleatorio necesitamos hacer mediciones u observaciones que nos ayudarán a investigar una o varias características de interés sobre el fenómeno. Para un correcto manejo de nuestras mediciones, las observaciones deben ser registradas tomando en cuenta su *tipo*, para poder saber que tipo de operaciones podemos hacer con ellas.

Como al medir un fenómeno aleatorio obtenemos diferentes registros llamaremos **variable** al conjunto de posibles resultados que podemos obtener.

De acuerdo a la característica que se desea estudiar, a los valores que toma la variable, se tiene la siguiente clasificación:

$$\text{Variables} \quad = \quad \begin{cases} \text{Categóricas} & \begin{cases} \text{Ordinales} \\ \\ \text{Nominales} \end{cases} \\ \\ \text{Numéricas} & \begin{cases} \text{Continuas} \\ \\ \text{Discretas} \end{cases} \end{cases}$$

1. Una variable es **categóricas** cuando el registro de la medición es un elemento a una categoría,

   (a) Ordinales

   - Cuando el registro de la medición se expresa en grados de intensidad que tienen un orden, pero no se puede determinar el incremento entre los grados.
   - Con variables de tipo ordinal podemos calcular: la moda, la mediana o los porcentiles de los datos.
   - Ejemplo: Grados de satisfacción en un servicio “Muy bueno”, “Bueno”, “Regular” y “Malo”.

   (b) Nominales

   - Cuando las categorías sólo se les da un nombre pero no tienen un orden entre ellas,
   - además las categorías de una variable nominal deben ser
     - mutuamente excluyentes (No hay un elemento que pertenezcan a dos o más categorías a la vez.) y
     - exhaustivas (todo elemento pertenece a una categoría).
   - Con este tipo de variables nosotros podemos calcular la(s) moda(s) y la frecuencia de ocurrencia en cada una de las categorías.
   - Ejemplo: ¿Está de acuerdo con las obras de continuación del segundo piso del Periférico? “Sí” “No”.

2. Numéricas porque los registros son valores numéricos

   (a) Discretas

   - son las variables que únicamente toman valores enteros.
   - Ejemplos: Número de hijos en un matrimonio.

   (b) Continuas

   - Toman cualquier valor numérico entero, fraccionario o irracional.
   - La precisión del registro dependerá del instrumento de medición.
   - Ejemplo: la estatura de una persona tomada al azar.

## Escalas de medición

Las **escalas de medición** son el conjunto de los posibles valores que puede tomar una variable. Los tipos de escalas de medición se determinan según los tipos de variables, es decir:

1. La escala de medición nominal: es la que incluye los valores de las variables nominales.

2. La escala de medición ordinal: es la que incluye los valores de las variables ordinales.

3. La escala de medición de intervalo le corresponden las variables numéricas. Para esta escala de medición existe el concepto de orden y distancia entre entre las observaciones.

## Conceptos estadísticos: población y muestra

Definamos como **población** a *todos los elementos presentan una característica común que estamos estudiando, acerca de la cual intentamos sacar alguna conclusión.* Y entenderémos como una **muestra** *a un subconjunto de elementos de la población.*

¿Por qué estudiamos muestras en vez de la población? Porque en ocasiones es poco factible o hasta imposible observar la totalidad de los individuos, es por esto que en lugar de examinar toda la población, se estudia una *pequeña*[1] parte de la población.

Una **muestra** de tamaño $n$ en general, es decir sin fijar los valores la denotaremos como

$$\mathbf{X} \quad = \quad \{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n\}.$$

Por otro lado cuando ya hemos observado los valores de la muestra[2], la escribiremos como

$$\mathbf{X} \quad = \quad \{X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, \ldots, X_n = x_n\}.$$

Y siempre que la escala de medición sea de intervalo, si tenemos una muestra $\{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n\}$ entonces podemos obtener la **muestra ordenada** y la denotaremos como

$$\left\{X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}, \ldots, X_{(n)}\right\},$$

donde $X_{(1)}$ es la observación más chica, $X_{(2)}$ es la segunda observación más chica, y así sucesivamente hasta que $X_{(n)}$ representa la observació mayor.

Una **muestra con reemplazo** se refiere a que una vez seleccionado un individuo para medirle una(s) característica(s), se regresa a la población puede volver a ser seleccionado o no; mientras que una **muestra sin reemplazo** es aquella que una vez seleccionado un individuo para formar parte de la muestra, no se le vuelve a tomar en cuenta nuevamente.

## Estadística descriptiva

Una vez que tenemos una muestra, $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n\}$, un primer paso es hacer estadística descriptiva sobre la muestra; que como su nombre lo indíca nos sirve para describir y resumir la información de las observaciones del fenómeno en estudio. Los datos pueden ser resumidos de la siguiente forma:

$$\text{Estadística descriptiva} \quad = \begin{cases} \text{Numéricamente} \begin{cases} \text{Medidas de tendencia central} \begin{cases} \text{Media} & \bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \\ \text{Mediana} \\ \text{Moda} \\ \text{Percentiles} \\ \text{Cuantiles} \\ \vdots \end{cases} \\ \text{Medidas de dispersión} \begin{cases} \text{Varianza muestral} & S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1} \\ \text{Desviación estándar} & S = \sqrt{S^2} \\ \text{Rango} & R = X_{(n)} - X_{(1)} \\ \text{Rango intercuantil} \\ \vdots \end{cases} \end{cases} \\ \text{Gráficamente} \begin{cases} \text{Histograma} \\ \text{Gráfico de tallo y hojas} \\ \text{Distribución acumulada} \\ \vdots \end{cases} \end{cases}$$

[1] Qué tan pequeña debe de ser la muestra para ser representativa de la población.

[2] Una realización de la muestra.

Si tenemos una muestra $\{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n\}$ como primera aproximacion podemos hacer una descripción de los datos. Un paso de abstracción mayor es preguntarse

- ¿Existe un modelo matemático–probabílistico del cual mi muestra sea una realización?
- ¿Este modelo describe a la población?
- ¿Si encontrara dicho modelo podría hacer prediccíónes de observaciones futuras con un margen de error pequeño?

Estas son algunas preguntas que trata de responder la **Inferencia Estadística**. que veremos más adelante, pero primero detengamonos a estudiar algunos de los modelos probabilísticos que nos serán de gran utilidad para hacer Inferencia.

# Variables aleatorias

Las variables aleatorias (v.a.) serán nuestros modelos que nos serviran para representar la regularidad estadística. Y las denotaremos letras mayúsculas $X$, $Y$, $W$, etc.

Una v.a.´s es una función que sirve para cuantificar los resultados de modo que se asigne un número real a cada uno de los resultados posibles del experimento.

Por ejemplo, en el experimento de lanzar una moneda, los resultados posibles son $\Omega = \{\text{águila, sol}\}$, entonces podemos definir la v.a. $X$ como

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si cae águila} \\ 0 & \text{si cae sol.} \end{cases}$$

Existen v.a. continuas y discretas, pero para cada variable aleatoria nosotros podemos asignarle una función de densidad, denotada $f(\cdot)$ con las siguientes propiedades:

- $f(x) \geq 0$, y
- $\begin{cases} \sum\limits_{\forall x \in \Omega} f(x) = 1 & \text{cuando la v.a. es discreta} \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 & \text{cuando la v.a. es continua.} \end{cases}$

## Distribucion Normal

La función de densidad normal o Gaussiana[3] destaca entre las distribuciones de tipo continuo, ya que es un modelo que se adecúa a una gran cantidad de situaciones en el mundo real, y porque su manejo matemático es más sencillo en muchas técnicas de inferencia.

***Definición***

*Diremos que una v.a.* $X$ ***se distribuye normal con media*** $\mu$ ***y varianza*** $\sigma^2$*, denotado por* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$*, si su función de densidad es:*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \ \textit{para} \ -\infty < x < \infty$$

*donde ,* $\mu = \mathbb{E}(X)$, $-\infty < \mu < \infty$, $Var(X) = \sigma^2$ *y* $\sigma^2 > 0$.

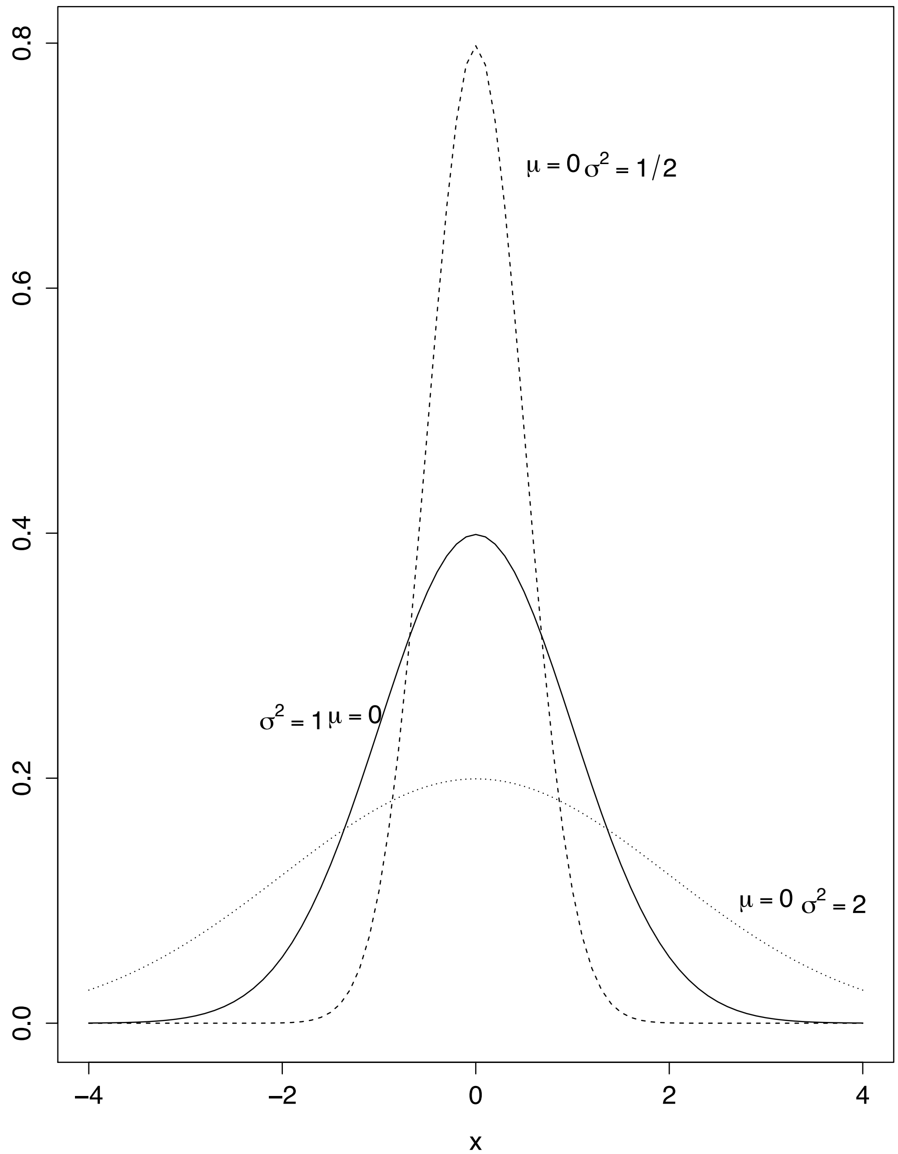
[3]En honor al matemático Johann Carl Friedrich Gauss 1777 – 1855.

**Observaciones**

1. A $(\mu, \sigma^2)$ se les conoce como los parámetros de la función de densidad.

2. $\mu$ coincide con la media, $\sigma^2$ coincide con la varianza de la v.a. y $\sqrt{\sigma^2} = \sigma$ se le conoce como la **desviación estándar**.

3. Cada par de valores $\mu$ y $\sigma^2$ determinan una función de densidad distinta




4. La función de densidad es simétrica alrededor del parámetro $\mu$ .

5. La media, la moda y la mediana coinciden en $\mu$.

6. Si hacemos que $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$ entonces

$$f_X(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, \text{ para } -\infty < x < \infty$$

que se conoce como la función de distribución **normal estándar**. Este miembro de la familia de normales es muy importante porque a partir de ella se pueden calcular las probabilidades de cualquier miembro de la familia.

A partir de cualquier v.a. $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ con $\sigma_X^2 > 0$, podemos llevarla a una v.a. normal estándar haciendo la siguiente transformación

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X},$$

a este proceso se le llama **estandación** o **estandarizar** la v.a. $X$.

Con el fin de ejemplificar lo antes dicho, supongamos que tenemos dos números reales fijos $a$ y $b$ tales que $a \leq b$; entonces si queremos sacar la **probabilidad** de que la v.a. $X$ tome **alguno** de los valores en el intervalo $[a, b]$ esto lo calculamos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= \mathbb{P}(a - \mu_X \leq X - \mu_X \leq b - \mu_X) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{a - \mu_X}{\sigma_X} \leq \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \leq \frac{b - \mu_X}{\sigma_X}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{a - \mu_X}{\sigma_X} \leq Z \leq \frac{b - \mu_X}{\sigma_X}\right). \end{aligned}$$

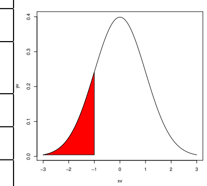
En resumen calcular la probabilidad del evento $a \leq X \leq b$, es equivalente a el evento $\dfrac{a - \mu_X}{\sigma_X} \leq Z \leq \dfrac{b - \mu_X}{\sigma_X}$, donde $Z \sim N(0, 1)$.

Recordemos que para calcular probabilidades en el caso de v.a.´s continuas es necesario calcular el área bajo la curva que determina la función de desnsidad $f(x)$, es decir

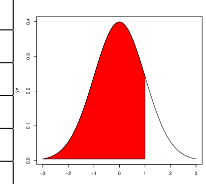
$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx,$$

donde $F(\cdot)$ es la función de distribución. En general no es fácil calcular el área bajo la curva determinada por la función de densidad normal estándar $f(z)$. Por fortuna existen tablas de la función de distribución $F(z) = \mathbb{P}(Z \leq z)$ para la normal estándar. Estas tablas están integrada de las siguiente forma: a) la primera **columna** tiene valores de la variable $Z$ de -3.6 a 3.6[4] b) el primer **renglón** permiten obtener valores más finos de la variable aleatoria hasta centésimos, y c) el resto de la tabla contiene las probabilidades de que la v.a. $Z$, es decir, $\mathbb{P}(Z \leq z)$.

| | **0** | **0.01** | **0.02** | **0.03** | **0.04** | **0.05** | **0.06** | **0.07** | **0.08** | **0.09** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **-3.6** | 0.00016 | 0.00015 | 0.00015 | 0.00014 | 0.00014 | 0.00013 | 0.00013 | 0.00012 | 0.00012 | 0.00011 |
| **-3.5** | 0.00023 | 0.00022 | 0.00022 | 0.00021 | 0.0002 | 0.00019 | 0.00019 | 0.00018 | 0.00017 | 0.00017 |
| **⋮** | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| **-1** | 0.15866 | 0.15625 | 0.15386 | 0.15151 | 0.14917 | 0.14686 | 0.14457 | 0.14231 | 0.14007 | 0.13786 |
| **-0.9** | 0.18406 | 0.18141 | 0.17879 | 0.17619 | 0.17361 | 0.17106 | 0.16853 | 0.16602 | 0.16354 | 0.16109 |
| **-0.8** | 0.21186 | 0.20897 | 0.20611 | 0.20327 | 0.20045 | 0.19766 | 0.19489 | 0.19215 | 0.18943 | 0.18673 |
| **-0.7** | 0.24196 | 0.23885 | 0.23576 | 0.2327 | 0.22965 | 0.22663 | 0.22363 | 0.22065 | 0.2177 | 0.21476 |
| **-0.6** | 0.27425 | 0.27093 | 0.26763 | 0.26435 | 0.26109 | 0.25785 | 0.25463 | 0.25143 | 0.24825 | 0.2451 |
| **-0.5** | 0.30854 | 0.30503 | 0.30153 | 0.29806 | 0.2946 | 0.29116 | 0.28774 | 0.28434 | 0.28096 | 0.2776 |
| **-0.4** | 0.34458 | 0.3409 | 0.33724 | 0.3336 | 0.32997 | 0.32636 | 0.32276 | 0.31918 | 0.31561 | 0.31207 |
| **-0.3** | 0.38209 | 0.37828 | 0.37448 | 0.3707 | 0.36693 | 0.36317 | 0.35942 | 0.35569 | 0.35197 | 0.34827 |
| **-0.2** | 0.42074 | 0.41683 | 0.41294 | 0.40905 | 0.40517 | 0.40129 | 0.39743 | 0.39358 | 0.38974 | 0.38591 |
| **-0.1** | 0.46017 | 0.4562 | 0.45224 | 0.44828 | 0.44433 | 0.44038 | 0.43644 | 0.43251 | 0.42858 | 0.42465 |



| | **0** | **0.01** | **0.02** | **0.03** | **0.04** | **0.05** | **0.06** | **0.07** | **0.08** | **0.09** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0.5 | 0.50399 | 0.50798 | 0.51197 | 0.51595 | 0.51994 | 0.52392 | 0.5279 | 0.53188 | 0.53586 |
| **0.1** | 0.53983 | 0.5438 | 0.54776 | 0.55172 | 0.55567 | 0.55962 | 0.56356 | 0.56749 | 0.57142 | 0.57535 |
| **0.2** | 0.57926 | 0.58317 | 0.58706 | 0.59095 | 0.59483 | 0.59871 | 0.60257 | 0.60642 | 0.61026 | 0.61409 |
| **0.3** | 0.61791 | 0.62172 | 0.62552 | 0.6293 | 0.63307 | 0.63683 | 0.64058 | 0.64431 | 0.64803 | 0.65173 |
| **0.4** | 0.65542 | 0.6591 | 0.66276 | 0.6664 | 0.67003 | 0.67364 | 0.67724 | 0.68082 | 0.68439 | 0.68793 |
| **0.5** | 0.69146 | 0.69497 | 0.69847 | 0.70194 | 0.7054 | 0.70884 | 0.71226 | 0.71566 | 0.71904 | 0.7224 |
| **0.6** | 0.72575 | 0.72907 | 0.73237 | 0.73565 | 0.73891 | 0.74215 | 0.74537 | 0.74857 | 0.75175 | 0.7549 |
| **0.7** | 0.75804 | 0.76115 | 0.76424 | 0.7673 | 0.77035 | 0.77337 | 0.77637 | 0.77935 | 0.7823 | 0.78524 |
| **0.8** | 0.78814 | 0.79103 | 0.79389 | 0.79673 | 0.79955 | 0.80234 | 0.80511 | 0.80785 | 0.81057 | 0.81327 |
| **0.9** | 0.81594 | 0.81859 | 0.82121 | 0.82381 | 0.82639 | 0.82894 | 0.83147 | 0.83398 | 0.83646 | 0.83891 |
| **1** | 0.84134 | 0.84375 | 0.84614 | 0.84849 | 0.85083 | 0.85314 | 0.85543 | 0.85769 | 0.85993 | 0.86214 |
| **1.1** | 0.86433 | 0.8665 | 0.86864 | 0.87076 | 0.87286 | 0.87493 | 0.87698 | 0.879 | 0.881 | 0.88298 |
| **1.2** | 0.88493 | 0.88686 | 0.88877 | 0.89065 | 0.89251 | 0.89435 | 0.89617 | 0.89796 | 0.89973 | 0.90147 |
| **1.3** | 0.9032 | 0.9049 | 0.90658 | 0.90824 | 0.90988 | 0.91149 | 0.91308 | 0.91466 | 0.91621 | 0.91774 |
| **1.4** | 0.91924 | 0.92073 | 0.9222 | 0.92364 | 0.92507 | 0.92647 | 0.92785 | 0.92922 | **0.93056** | 0.93189 |
| **1.5** | 0.93319 | 0.93448 | 0.93574 | 0.93699 | 0.93822 | 0.93943 | 0.94062 | 0.94179 | 0.94295 | 0.94408 |
| **1.6** | 0.9452 | 0.9463 | 0.94738 | 0.94845 | 0.9495 | 0.95053 | 0.95154 | 0.95254 | 0.95352 | 0.95449 |
| **⋮** | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| **3.5** | 0.99977 | 0.99978 | 0.99978 | 0.99979 | 0.9998 | 0.99981 | 0.99981 | 0.99982 | 0.99983 | 0.99983 |
| **3.6** | 0.99984 | 0.99985 | 0.99985 | 0.99986 | 0.99986 | 0.99987 | 0.99987 | 0.99988 | 0.99988 | 0.99989 |



Por ejemplo, si deseamos calcular $\mathbb{P}(Z \leq 1.48)$, buscamos en la primera columna el número 1.4 y en la primera hilera el número 0.08. El número ubicado en la intersección de la hilera con el número 1.4 y la columna encabezada por 0.08 es la probabilidad buscada, es decir:

$$\mathbb{P}(Z \leq 1.48) \quad = \quad 0.93056$$

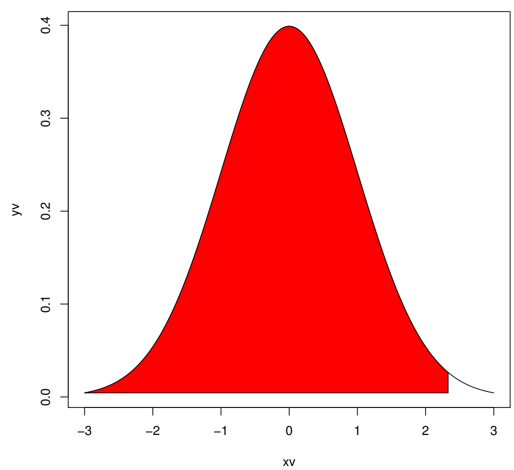
[4]Para ver la tabla completa ver el apéndice

Dado que la distribución normal es simétrica se tienen las siguientes igualdades que simplifican el uso de la tabla .
Si $Z \sim N(0,1)$ y $z, z_1$ y $z_2$ son números reales cualesquiera tales que $z_1 < z_2$:

1. $\mathbb{P}(Z \geq z) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(Z \leq -z)$
2. $\mathbb{P}(-z \leq Z \leq z) = 1 - 2\mathbb{P}(Z \leq -z)$
3. Si $z > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \leq z) &= 0.5 + \mathbb{P}(0 \leq Z \leq z) \\ \mathbb{P}(Z \leq -z) &= 0.5 - \mathbb{P}(0 \leq Z \leq z) \end{aligned}$$

**Ejemplo.** Sea una v.a. $Z \sim N(0,1)$. Deseamos encotrar $\mathbb{P}(Z \leq 2.33)$ y $\mathbb{P}(Z \geq 2.33)$. La primera probabilidad corresponde al área sombreada en la siguiente figura




y puede obtenerse directamente de la tabla. Por lo tanto, $\mathbb{P}(Z \leq 2.33) = 0.9901$. La segunda probabilidad pedida corresponde al área que no está sombreada en la figura. Puesto que el área total bajo la curva es uno, entonces $\mathbb{P}(Z \geq 2.33) = 1 - 0.9901 = 0.0099$.

## Distribución $\chi^2$ o de Pearson

Una v.a. $\chi^2$(se lee, ji cuadrada) se genera a partir de la suma de variables aleatorias **independientes** normales con media cero y varianza uno. Es decir, si $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k \sim N(0,1)$ y son independientes entonces si definimos la nueva v.a. $W$ como

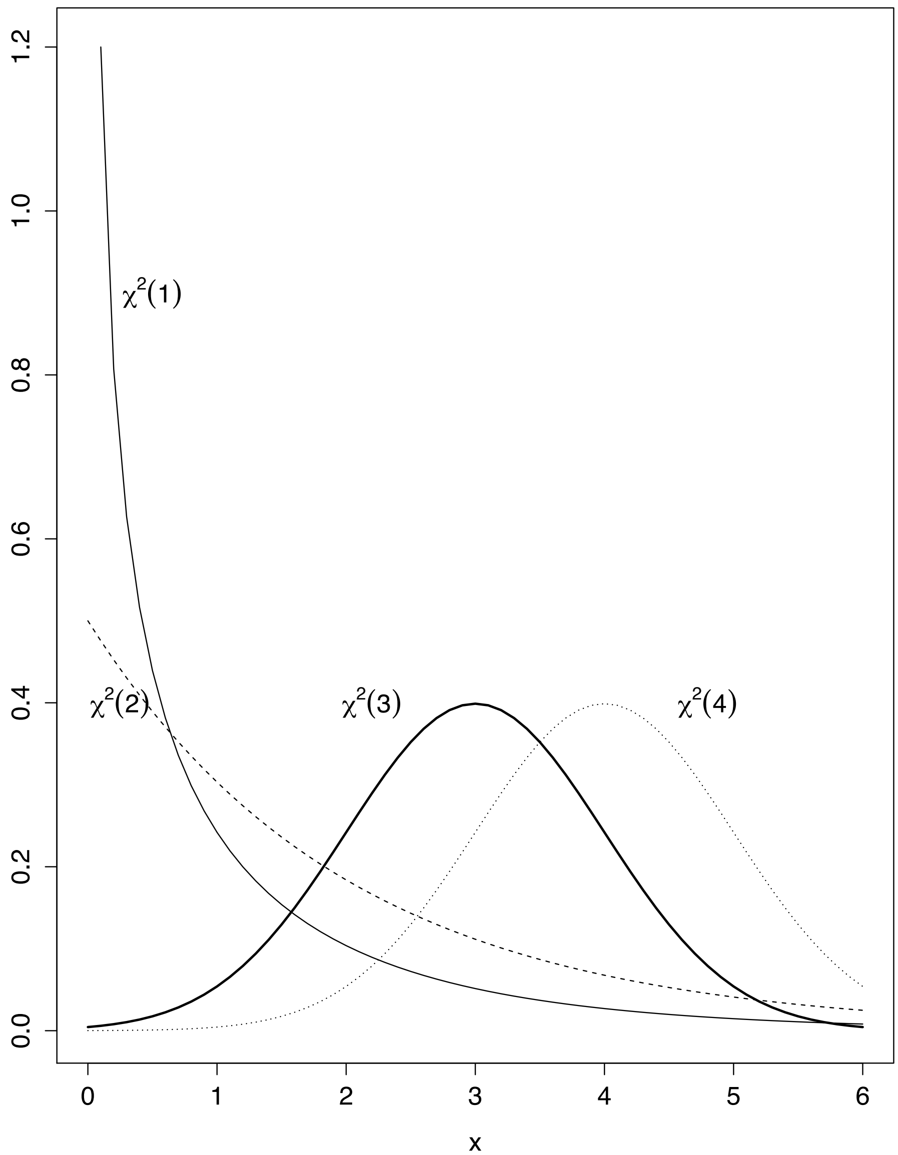
$$W = Z_1^2 + \cdots + Z_k^2,$$

entonces diremos $W$ **se distribuye como una ji cuadrada con $k$ grados de libertad**, y lo denotaremos como $W \sim \chi_k^2$.

**Observaciones**

1. El número de términos en la suma son los grados de libertad.
2. Se puede probar que la esperanza de $W$ es $k$, es decir que $\mathbb{E}(W) = k$, y
3. la varianza de $W$ es $2k$, es decir $\mathrm{Var}(W) = 2k$.

A continuacion algunas funciones de densidad $W \sim \chi^2_k$, para distintas $k$´s.



## Distribución $t$ de Student

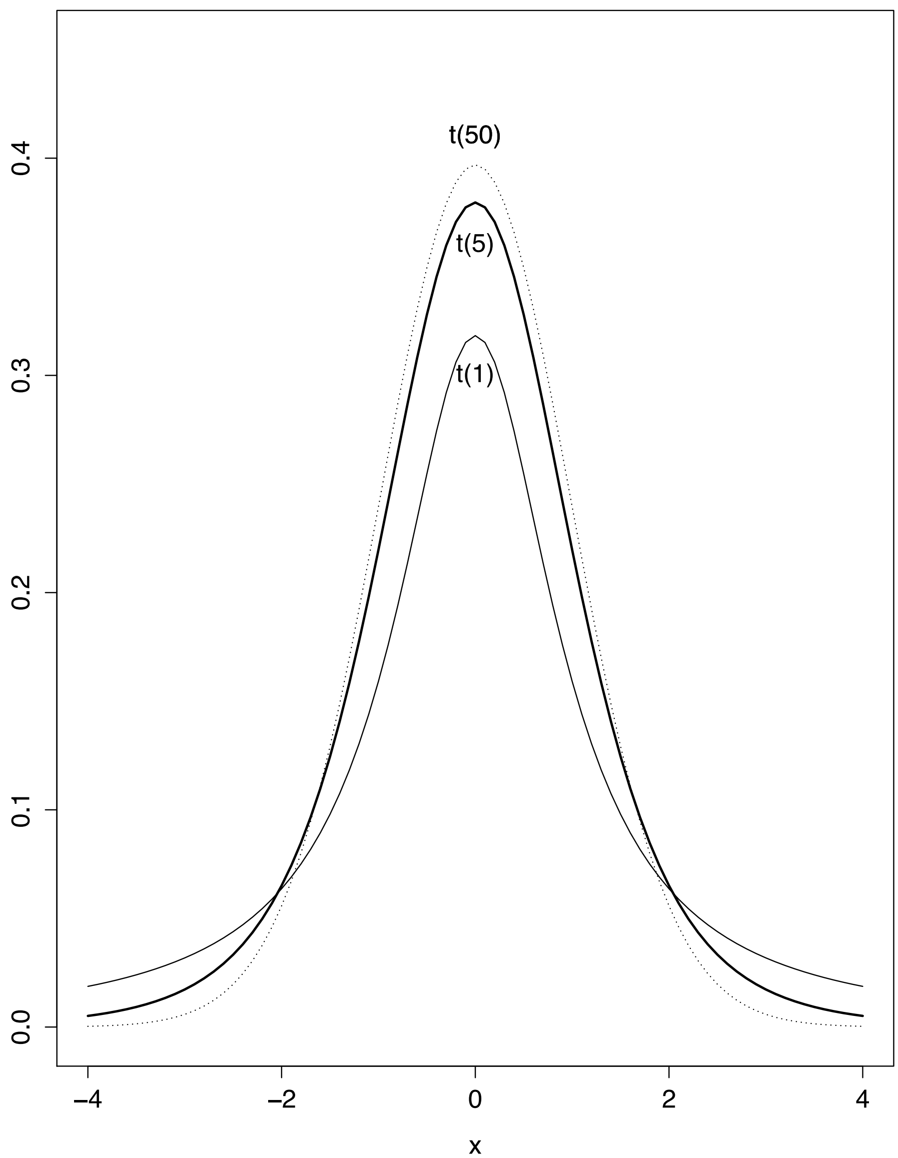
Si $Z \sim N(0,1)$ y $W \sim \chi_k^2$ donde $Z$ y $W$ son **independiente**. Si entonces la v.a. definida por la transformación

$$Y = \frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{k}}},$$

diremos que $Y$ **se distribuye $t$ de Student con $k$ grados de libertad**, y lo denotaremos por $Y \sim t_k$.
**Observaciones**

- Los grados de libertad de $t_k$ son los mismos grados de la $\chi^2$ que la genera.
- Esta función de distribución es parecida a la normal centrada en cero
  - en el sentido de que también es simétrica alrededor del cero,
  - pero la $t_k$ se diferencía de la normal en que tiene colas más pesadas.
  - Cuando los grados de libertad $k$ tienden a infinito, entonces $t_k$ tiende a una $N(0,1)$, y lo podemos escribir como $t_k \longrightarrow N(0,1)$ cuando $k \to \infty$.

A continuación se ilustran alguna funciones de densidad $t_k$




## Distribución $F$ de Snedecor

Si $u$ y $v$ son números enteros positivos y definimos las siguentes v.a.´s como $V \sim \chi^2_u$ y $W \sim \chi^2_v$ donde $V$ y $W$ son **independiente**. Entonces la v.a. definida por la transformación

$$K = \frac{{}^{\mathrm{V}}\!/_{\mathrm{d1}}}{{}^{\mathrm{W}}\!/_{\mathrm{d2}}},$$

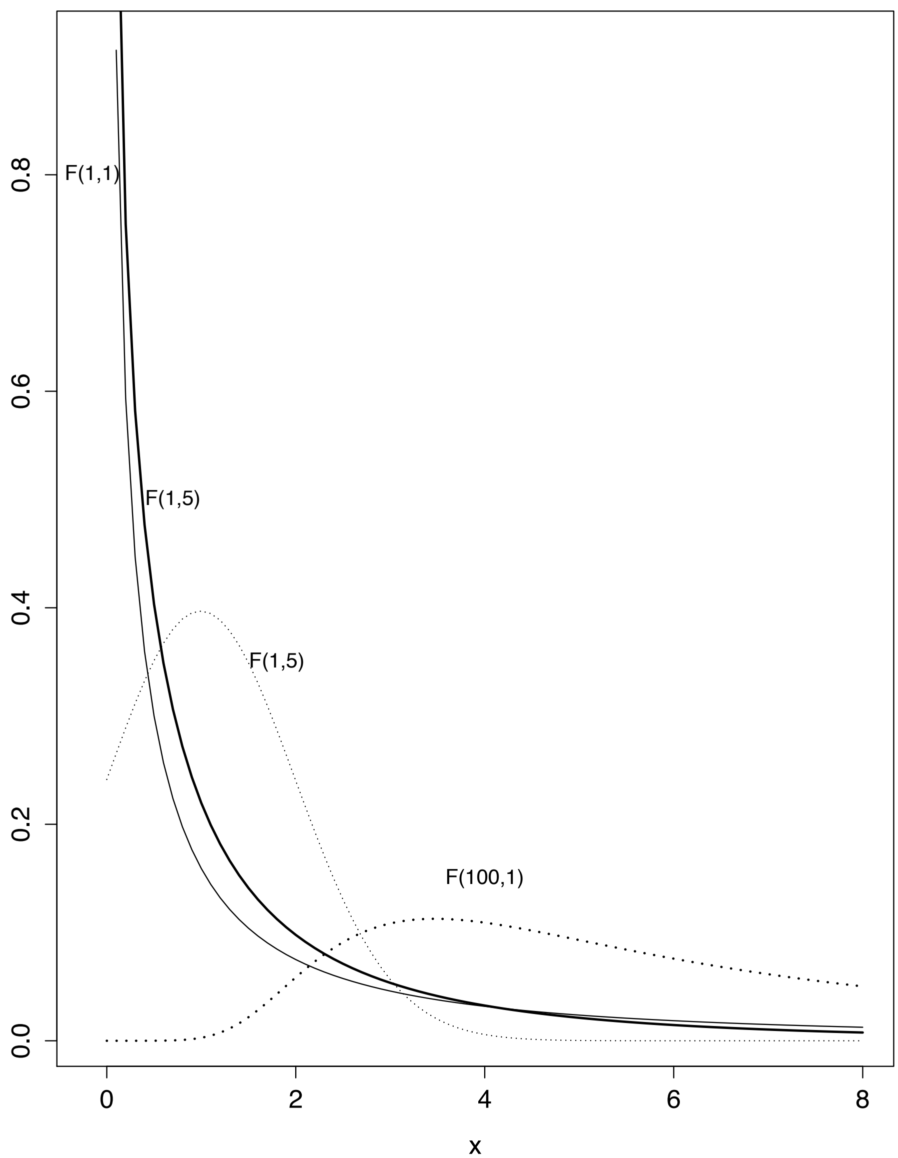
se dice que $K$ **se distribuye $F$ de Snedecor con $u$ y $v$ grados de libertad**, y lo denotaremos por $K \sim F_{u,v}$.

**Observaciones**

- Los grados de libertad $u$ y $v$ de la $F_{u,v}$ los determinan los grados de la $\chi^2$ en el numerador y en el denominador respectivemete.

- Si $K \sim F_{u,v}$ entonces $\dfrac{1}{K} = K^{-1} \sim F_{v,u}$.

A continuación se ilustran alguna funciones de densidad $F_{u,v}$ para distintas $u's$ y $v's$ :



# Introducción a la inferencia

*Grosso modo* se llama inferencia estadística al proceso de tratar de conocer algo relativo a la regularidad estadística de alguna medición en una cierta población.

Si se supone que esta regularidad se puede **modelar** bien con una v.a. $X$ con una cierta distribución[5]. Entonces diremos que estamos haciendo **inferencia estadística paramétrica**.

Definamos más formalmente que entenderémos por muestra.

Sea $X$ la v.a. correspondiente a una población con función de distribución $F(x)$. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son v.a.´s independientes e identicamente distribuidas, $F(x)$, en adelante denotado por v.a.i.i.d. Entonces $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son un conjunto que llamaremos **muestra aleatoria simple** o **muestra aleatoria**.

## Estimación de parámetros

Ahora una vez que suponemos que la población sigue cierto comportamiento distribucional $F(x)$ (por ejemplo una normal), con base en la información contenida en una muestra aleatoria quisieramos saber cuáles son los parámetros adecuados ($\mu$ y/o $\sigma$, continuando con ejemplo de la normal).

La estimación de los parámetros se puede hacer de manera **puntual**, o/y por **intervalo**.

Un estimador es una fórmula que establece como calcular una estimación basada en las mediciones contenidas en una muestra. Entonces un estimador es una estadística y por definición diremos que una estadística es una función de la muestra[6] y es una variable aleatoria.

Se pueden proponer varios estimadores para un parámetro. Por ejemplo, si cada uno de 10 ingenieros fuera asignado para estimar el costo de una gran obra, obtendrían casi seguramente distintas estimaciones del costo total. Los ingenieros serían los estimadores, que utilizarían sus conocimientos para hacer la estimación, cada uno representa una sola regla humana para obtener la estimación. O para el caso de la media de una población se puede estimar a través de la media aritmética $\bar{X}$, la mediana o la moda.

**Notación**

Si deseamos estimar el parémetro $\theta$ diremos que $\hat{\theta}$ es un estimador y $\tilde{\theta}$ puede ser otro.

De manera natural surge la pregunta ¿Cuáles son los mejores estimadores?

## Propiedades de los estimadores.

La estimación puntual es similar al proceso de disparar con una pistola a un blanco. El estimador que genera estimaciones es la pistola, y una estimación en particular es una bala, y el parámetro de interés es el blanco. Al hacer un muestreo y estimar el valor de un parámetro es equivalente a disparar un solo tiro al blanco.

La evaluación de un estimador $\hat{\theta}$, se haría construyendo una distribución de frecuencias de las estimaciones obtenidas en un muestreo repetitivo y se observaría como se agrupa la distribución alrededor del parámetro en estudio. Se espera que un buen estimador tenga como esperanza al parámetro estimado, es decir, $\mathbb{E}\left(\hat{\theta}\right) = \theta$.

Dicimos que **un estimador $\hat{\theta}$ es insesgado si** $\mathbb{E}\left(\hat{\theta}\right) = \theta$, de lo contrario se dice que es sesgado. Si $\mathbb{E}\left(\hat{\theta}\right) > \theta$ estamos sobre estimando y si $\mathbb{E}\left(\hat{\theta}\right) < \theta$ caemos es subestimación.

El **sesgo** $B$ de un estimador puntual $\hat{\theta}$ esta dado por $B = \mathbb{E}\left(\hat{\theta}\right) - \theta$.

[5]El tipo de distribución se asigna según el contexto de nuestros datos.
[6]Que no depende del parámetro que deseamos estimar.

**Ejemplo Estimadores insesgados**
Sea $X_1, \ldots, X_{10}$ una muestra aleatoria con media $\mu$ y varianza $\sigma^2$ considere los siguientes estimadores para $\mu$:

1. $\hat{\theta}_1 = X_1$,
2. $\hat{\theta}_2 = \frac{X_1+X_2}{2}$,
3. $\hat{\theta}_3 = \bar{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_{10}}{10} = \bar{X}$.

Las esperanzas de los estimadores anteriores son:

1. $$\mathbb{E}\left(\hat{\theta}_1\right) = \mathbb{E}\left(X_1\right) = \mu,$$
2. $\mathbb{E}\left(\hat{\theta}_2\right) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(X_1+X_2\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left(X_1\right)+\mathbb{E}\left(X_2\right)\right) = \frac{\mu+\mu}{2} = \mu$,
3. $\mathbb{E}\left(\hat{\theta}_3\right) = \frac{1}{10}\mathbb{E}\left(X_1+\cdots+X_{10}\right) = \frac{10\mu}{10} = \mu$,

respectivamente. Por lo tanto $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ y $\hat{\theta}_3$ son estimadores insesgados de $\mu$.
Otra propiedad deseable del estimador $\hat{\theta}$ es que la $Var\left(\hat{\theta}\right)$ sea mínima. Si se tiene dos estimadores insesgados $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ para un mismo parámetro $\theta$, se preferirá el estimador con varianza menor.
El **Error Cuadrático Medio** del estimador $\hat{\theta}$, se define como$\mathbb{E}\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right]$, y lo denotaremos como $ECM(\hat{\theta})$ y se puede probar que
$$ECM(\theta) = Var\left(\hat{\theta}\right) + B^2,$$
es decir, es una medida que involucra el sesgo y la varianza del estimador $\hat{\theta}$.
**Observacion**
Si el estimador $\hat{\theta}$ es insesgado para $\theta$, entonces
$$ECM(\theta) = Var\left(\hat{\theta}\right).$$

**Eficiencia relativa**

Si $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son dos estimadores insesgados de $\theta$, se dice que $\hat{\theta}_1$ es más eficiente que $\hat{\theta}_2$ si $Var\left(\hat{\theta}_2\right) > V\left(\hat{\theta}_1\right)$.
Con el anterior ejemplo de los estimadores insesgados veremos cuál es más eficiente

1. $Var\left(\hat{\theta}_1\right) = Var\left(X_1\right) = \sigma^2$
2. $Var\left(\hat{\theta}_2\right) = Var\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(Var\left(X_1+X_2\right)\right) = \frac{1}{4}\left(Var\left(X_1\right)+Var\left(X_2\right)\right) = \frac{2\sigma^2}{4} = \frac{\sigma^2}{2}$.
3. $Var\left(\hat{\theta}_3\right) = Var\left(\frac{X_1+\cdots+X_{10}}{10}\right) = \frac{1}{100}\left(Var(X_1+\cdots+X_{10})\right) = \frac{1}{100}\left(Var(X_1)+\cdots+Var(X_{10})\right) = \frac{10\sigma^2}{100} = \frac{\sigma^2}{10}$.

$\hat{\theta}_3$ es más eficiente que $\hat{\theta}_2$ y $\hat{\theta}_1$, puesto que $Var\left(\hat{\theta}_3\right) < Var\left(\hat{\theta}_2\right) < Var\left(\hat{\theta}_1\right)$.

**Consistencia (no será materia de examen)**

Si se lanzara una moneda $n$ veces que tiene probabilidad $p$ de ser águila, entonces $Y$, el número de águilas en los $n$ lanzamientos, tiene una distribución binomial. Si $p$ es desconocido se puede estimar con $Y/n$. ¿Qué pasa con esta proporción muestral si aumenta el número de lanzamientos $n$? Intuitivamente se pensaría que $Y/n$ debería estar más cerca de $p$. Esto en términos de probabilidad se escribe así:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{Y}{n}-p\right|\leq\epsilon\right)$$

Esta probabilidad debería ser cercana a la unidad para valores grandes de $n$. Si la probabilidad de arriba tiende a uno cuando $n\to\infty$ entonces $Y/n$ es un estimador **consistente** de $p$. En general un estimador $\hat{\theta}$ de $\theta$ es consistente si para cualquier número positivo $\epsilon$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(|\hat{\theta}_n-\theta|\leq\epsilon\right)=1$$

**Suficiencia.(no será materia de examen)**

Al calcular un estimador con los valores de la muestra se "resume" la información en un número, ¿Este procedimiento de resumir los datos de la muestra mantiene toda la información con respecto al parámetro de interés, o se ha perdido u ocultado algo de la información en el proceso de sintetizar datos?.

Por ejemplo consideremos los resultados de $n$ pruebas de un experimento Bernoulli $X_1...X_n$. Sea $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$, el número de éxitos en $n$ pruebas. Si se conoce el valor de $Y$, ¿es posible obtener más información con respecto a $p$ al considerar otras funciones de $X_1...X_n$? Una forma de contestar esto es considerar la distribución condicional de $X_1...X_n$ dado $Y$.

$$\mathbb{P}\left(X_1=X_1,...,X_n=X_n|Y=y\right)=\frac{p^y(1-p)^{n-y}}{\begin{pmatrix}n\\y\end{pmatrix}p^y(1-p)^{n-y}}=\frac{1}{\begin{pmatrix}n\\y\end{pmatrix}}$$

Es importante hacer notar que la distribución condicional de $X_1...X_n$ dado $Y$ no depende de $p$. Es decir, una vez conocido $Y$, ninguna otra función de $X_1...X_n$ suministra más información con respecto a $p$. Por lo tanto $Y$ es un estadístico suficiente para $p$. En general se dice que un estadístico $U=g\left(X_1...X_n\right)$ es suficiente para $\theta$ si la distribución condicional de $X_1...X_n$ dado $U$ no depende de $\theta$.

# Intervalos de confianza

Una vez que se tiene un estimador puntual $\hat{\theta}$ dada una muestra aleatorioa $\boldsymbol{X}$ en particular, no se sabe que tan cercano está el estimador del verdadero valor del parámetro $\theta$; esta es la razón por la cual es deseable acompañar la estimación puntual de alguna medida de error asociado a esta estimación, es decir, asociar a cada estimación puntual del parámetro un intervalo

$$\left[L_i(\boldsymbol{X}),L_s(\boldsymbol{X})\right],$$

donde $L_i(\boldsymbol{X})$ y $L_s(\boldsymbol{X})$ son el límite inferior y superior respectivamente del intervalo, y ambos son funciones de la información muestral.

Además, una medida que nos refleje la *confianza* que tenemos acerca de que el verdadero valor del parámetro pertenezca a dicho intervalo.

$$\mathbb{P}\left(L_i(\boldsymbol{X})\leq\theta\leq L_s(\boldsymbol{X})\right)\quad=\quad 1-\alpha\,,\tag{1}$$

donde a $1-\alpha$ se le conoce como el nivel de confianza.

**Observaciones**

- Una vez fijado el nivel de confianza, los límites del intervalo de confianza varían aleatoriamente según la muestra seleccionada, por lo tanto la longitud es aleatoria.
- La expresión (1) **no** debe entenderse como; la probabilidad de que el parámetro $\theta$ tome algún valor entre $L_i(\boldsymbol{X})$ y $L_s(\boldsymbol{X})$ es igual a $1-\alpha$; ya que:
  - En la práctica, el parámetro $\theta$ siempre será desconocido.
  - Desde el punto de vista de la estadística clásica, en la expresión (1) las variables aleatorias son $L_i(\boldsymbol{X})$ y $L_s(\boldsymbol{X})$ y no el parámetro $\theta$.
- Una forma de interpretar (1) es; $1-\alpha$ es la probabilidad de que el intervalo $[L_i(\boldsymbol{X}), L_s(\boldsymbol{X})]$ incluya el verdadero valor del parámetro. O en otras palabras, si consideramos un número grande de muestras del mismo tamaño y calcularemos $L_i(\boldsymbol{X})$ y $L_s(\boldsymbol{X})$ para cada muestra entonces se tendrá que aproximadamente en el $(1-\alpha)\times 100\%$ de los intervalos resultantes estará incluido el verdadero valor de $\theta$. En consecuencia a $[L_i(\boldsymbol{X}), L_s(\boldsymbol{X})]$ se le conoce como intervalo de confianza con nivel de confianza del $(1-\alpha)\times 100\%$.

# La Distribución de la Media Muestral $\bar{X}$

**Media y varianza de la media muestral.**

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una **muestra aleatoria** de una función de distribución de probabilidades $f_X(x)$, con media $\mu_X$ y varianza $\sigma_X^2$. La media y la varianza de la media muestral $\bar{X}$ son:

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu_X$$

$$Var(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}$$

Si la muestra se toma sin reemplazo de una población finita de tamaño $N$, la expresión anterior debe modificarse como sigue:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma_X^2}{n}$$

Los resultados que se presentan son para la media de variables aleatorias , es decir, para la media de lo que llamamos una muestra aleatoria, y no volveremos a ocuparnos del muestreo sin reemplazo.

## Teorema Central del Límite

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una función de probabilidades $f_X(x)$, con media $\mu_X$ y varianza $\sigma_X^2$. Sea $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$ la media aritmética de las variables aleatorias que integran la muestra. Para un tamaño de muestra $(n)$ grande, **la distribución de la variable aleatoria $\bar{X}$ es aproximadamente normal** con media $\mu_X$ y varianza $\sigma_X^2/n$. En símbolos esto se escribe:

$$\bar{X} \dot{\sim} N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n}\right)$$

donde el símbolo $\dot{\sim}$ debe leerse "se distribuye aproximadamente".

Si se estandariza la variable aleatoria $\bar{X}$, tenemos:

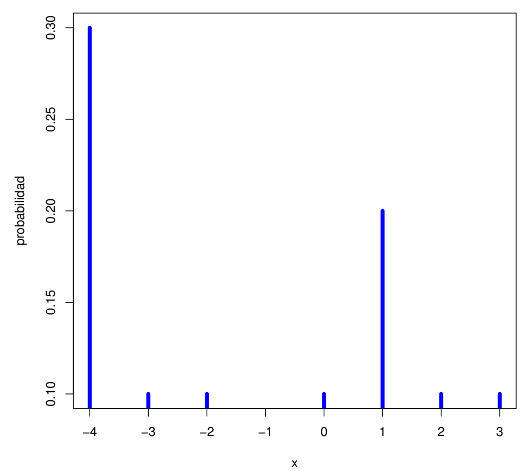
$$\frac{\bar{X} - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_X)}{\sigma_X} \sim N(0,1).$$

El Teorema Central del Límite establece que para un tamaño de muestra grande la distribución de $\bar{X}$ es aproximadamente normal:

1. independientemente de que la v.a. $X$[7] de la cual se está muestreando,
2. el teorema funciona aún si la distribución es discreta,
3. sea simétrica o asimétrica la forma de la densidad de $f_X(x)$
4. la expresión "tamaño de muestra grande" es ambigüa, por lo tanto el tamaño de muestra para el cual la aproximación es buena depende de la forma de $f_X(x)$.

**Ejemplo.** La función de probabilidades de una varible aleatoria $X$ es:

| $X$ | -4 | -3 | -2 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x)$ | 0.3 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 0.1 | 0.1 |




Como podemos ver la densidad de $X$ no se parece a una distribución Normal. Con objeto de ver la rapidez con que la distribución de medias se aproxima a una Normal, se tomaron 100 muestras aleatorias de tamaño 2 de $f_X(x)$ y se calculó la media aritmética para cada una de las 100 muestras.

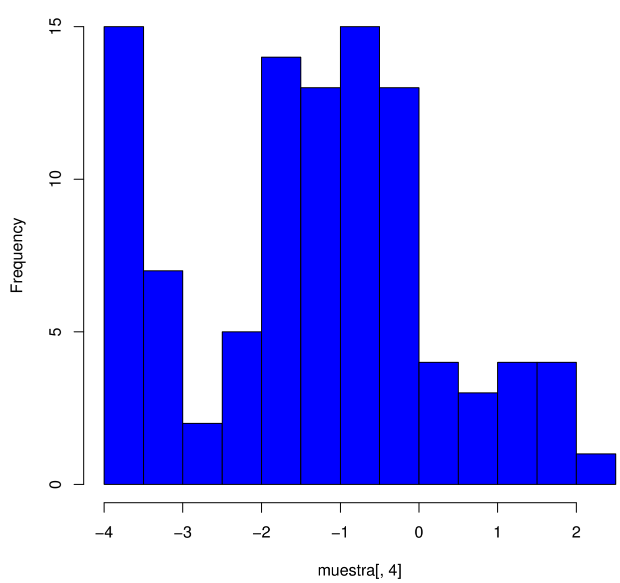
[7]Siempre y cuanto tenga hasta segundo momento finito.

| Índice | $X_1$ | $X_2$ | $\bar{X}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | -4 | -4 | -4 |
| 2 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | -4 | 2 | -1 |
| 4 | -4 | 2 | -1 |
| 5 | -2 | 1 | -0.5 |
| 6 | -3 | 3 | 0 |
| 7 | -4 | -3 | -3.5 |
| 8 | 3 | 1 | 2 |
| 9 | 3 | -3 | 0 |
| 10 | 2 | -4 | -1 |
| 11 | -3 | 0 | -1.5 |
| 12 | -4 | 1 | -1.5 |
| 13 | -4 | 1 | -1.5 |
| 14 | -3 | 1 | -1 |
| 15 | -4 | -4 | -4 |
| 16 | -4 | -2 | -3 |
| 17 | 2 | -2 | 0 |
| 18 | 2 | -2 | 0 |
| 19 | -3 | -4 | -3.5 |
| 20 | 2 | 1 | 1.5 |
| 21 | 3 | -4 | -0.5 |
| 22 | -4 | -4 | -4 |
| 23 | -2 | 3 | 0.5 |
| 24 | -4 | -3 | -3.5 |
| 25 | 1 | 0 | 0.5 |

| Índice | $X_1$ | $X_2$ | $\bar{X}$ |
|---|---|---|---|
| 26 | -3 | 1 | -1 |
| 27 | 2 | -4 | -1 |
| 28 | 0 | 2 | 1 |
| 29 | -3 | -4 | -3.5 |
| 30 | -4 | 3 | -0.5 |
| 31 | 1 | -4 | -1.5 |
| 32 | -3 | 3 | 0 |
| 33 | 3 | -3 | 0 |
| 34 | 3 | -4 | -0.5 |
| 35 | -3 | -3 | -3 |
| 36 | -4 | 1 | -1.5 |
| 37 | 1 | -2 | -0.5 |
| 38 | -4 | -2 | -3 |
| 39 | -4 | 2 | -1 |
| 40 | -3 | -4 | -3.5 |
| 41 | -4 | -2 | -3 |
| 42 | 3 | -4 | -0.5 |
| 43 | 0 | -4 | -2 |
| 44 | 2 | -3 | -0.5 |
| 45 | -2 | 0 | -1 |
| 46 | 3 | -3 | 0 |
| 47 | 1 | -2 | -0.5 |
| 48 | 1 | 3 | 2 |
| 49 | -4 | -4 | -4 |
| 50 | -3 | -3 | -3 |

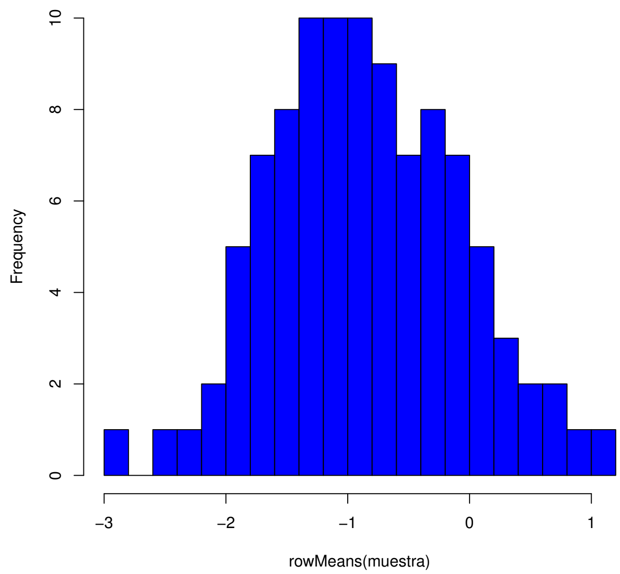
| Índice | $X_1$ | $X_2$ | $\bar{X}$ |
|---|---|---|---|
| 51 | 0 | 1 | 0.5 |
| 52 | 0 | 0 | 0 |
| 53 | -2 | 2 | 0 |
| 54 | -4 | -2 | -3 |
| 55 | 2 | 2 | 2 |
| 56 | -2 | -2 | -2 |
| 57 | 3 | -4 | -0.5 |
| 58 | 0 | -4 | -2 |
| 59 | 3 | -4 | -0.5 |
| 60 | 1 | 1 | 1 |
| 61 | 1 | -4 | -1.5 |
| 62 | -4 | 1 | -1.5 |
| 63 | 2 | -2 | 0 |
| 64 | -2 | 1 | -0.5 |
| 65 | 2 | -3 | -0.5 |
| 66 | -3 | -2 | -2.5 |
| 67 | 2 | 0 | 1 |
| 68 | -4 | 1 | -1.5 |
| 69 | -4 | -4 | -4 |
| 70 | 0 | -3 | -1.5 |
| 71 | 3 | 2 | 2.5 |
| 72 | 1 | -4 | -1.5 |
| 73 | -4 | -3 | -3.5 |
| 74 | 0 | 0 | 0 |
| 75 | -2 | -4 | -3 |

| Índice | $X_1$ | $X_2$ | $\bar{X}$ |
|---|---|---|---|
| 76 | 2 | 1 | 1.5 |
| 77 | -4 | -3 | -3.5 |
| 78 | -3 | 1 | -1 |
| 79 | 3 | -3 | 0 |
| 80 | -2 | 2 | 0 |
| 81 | -4 | -4 | -4 |
| 82 | -4 | 0 | -2 |
| 83 | -2 | 1 | -0.5 |
| 84 | 0 | -4 | -2 |
| 85 | 0 | -3 | -1.5 |
| 86 | -3 | -2 | -2.5 |
| 87 | 1 | -4 | -1.5 |
| 88 | 1 | -4 | -1.5 |
| 89 | 1 | -4 | -1.5 |
| 90 | -4 | -4 | -4 |
| 91 | 2 | -4 | -1 |
| 92 | 3 | -4 | -0.5 |
| 93 | -2 | 0 | -1 |
| 94 | -2 | 3 | 0.5 |
| 95 | -4 | 2 | -1 |
| 96 | 2 | 1 | 1.5 |
| 97 | 3 | 0 | 1.5 |
| 98 | -4 | -4 | -4 |
| 99 | 3 | -4 | -0.5 |
| 100 | 1 | -3 | -1 |




El anterior histograma correspondiente los pormedios las muestras aleatorias de tamaño dos. A pesar de que el histograma no tiene una gran similitud con una distribución normal, notemos que es más simétrica que $f_X(x)$. No perdamos de vista que cada muestra es de tamaño 2.

El siguiente histograma es el que se obtuvo al obtener 100 muestras aleatorias tamaño 10 de la misma $f_X(x)$, y notamos un parecido mayor a la normal con tan solo una muestra de tamaño 10.




## Distribución de $\bar{X}$ cuando la muestras aleatorias sigue una distribución normal con $\sigma$ conocida

Sea una poblacon con función de distribución $F(x;\theta)$ donde $\theta$ es un parámetro desconocido. Los siguientes métodos consisten en la obtención de una contidad pivotal o pivote que cumple con las siguientes dos condiciones:

- Una cantidad pivotal es una función de las observaciones muestrales y el parámetro, $T(X_1, X_2, \ldots, X_n; \theta)$
- Y la distribución de la cantidad pivotal $T(X_1, X_2, \ldots, X_n; \theta)$ no depende del parámetro.

Los siguientes resultados serán muy útiles en la construcción de intervalos de confianza usando cantidades pivotales.

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria [8] con distribución $N(\mu, \sigma^2)$, es decir, que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de $f_X(x)$,donde $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Entonces la media aritmética $\bar{X}$ tiene la siguiente distribución

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Estandarizando $\bar{X}$ tenemos que

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1).$$

[8] Es decir una colección de v.a.i.i.d.

## Distribución de $\bar{X}$ cuando la muestras aleatorias sigue una distribución normal con $\sigma$ desconocida

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una $N\left(\mu, \sigma^2\right)$, y sean $\bar{X}$ y $S^2$ la media y la varianza muestrales, respectivamente. Entonces se puede probar que

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t_{(n-1)}.$$

## Distribución de $S^2$ para muestras aleatorias con distribución normal

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ muestra aleatoria con distribución $N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Sea $S^2$ la varianza muestral dada por:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2.$$

Se puede probar que $\mathbb{E}\left[S^2\right] = \sigma^2$, usando este hecho tenemos que

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}.$$

# Intervalos de confianza

## Para una media poblacional $\mu$ en los casos de varianza conocida y desconocida

Si se tiene una m.a. $X_1, \ldots, X_n$ de una $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ entonces $\bar{X}$ se distribuye como una $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. Estandarizando se tiene

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \quad \sim \quad N(0,1)$$

Se pueden encontrar valores $-z_{\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$ en la tabla de la normal tales que:

$$\mathbb{P}\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} < z_{\alpha/2}\right) \quad = \quad 1-\alpha$$

Cuando $\sigma^2$ es **desconocida** y se estima a través de $S^2$. Con anterioridad se vió que

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \quad \sim \quad t_{(n-1)}.$$

En la tabla de la $t$ de Student con $n-1$ grados de libertad se pueden encontrar valores $-t_{\alpha/2}(n-1)$ y $t_{\alpha/2}(n-1)$ tales que:

$$\mathbb{P}\left(-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} < t_{\alpha/2}(n-1)\right) \quad = \quad 1-\alpha$$

NOTA.- La doble desigualdad que queda dentro de la probabilidad en la línea anterior designa un evento en el espacio muestral, ese evento es equivalente bajo operaciones algebraicas.
Multiplicando los tres miembros de la doble desigualdad por $S/\sqrt{n}$ se obtiene:

$$\mathbb{P}\left(\frac{-S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1) < \bar{X}-\mu < \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right) \quad = \quad 1-\alpha$$

Si además multiplicamos todo por -1 y además sumamos $\bar{X}$ a los tres miembros obtenemos:

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right) \quad = \quad 1-\alpha$$

Entonces de aquí decimos que

$$\left[\bar{X} - \tfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \bar{X} + \tfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right]$$

es un intervalo al $(1-\alpha)\times 100\%$ de confianza para $\mu$, cuando $\sigma^2$ es desconocida.
Regresando al caso en que $\sigma^2$ es conocida

$$\left[\bar{X} - \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\ z_{\alpha/2}, \bar{X} + \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\ z_{\alpha/2}\right]$$

es el intervalo del $(1-\alpha)\times 100\%$ de confianza para $\mu$.

**Ejemplo.** Los rendimientos para botes de pintura (la misma presentación) en $m^2$ son: 5.52, 3.75, 4.31, 3.27, 5.99, 4.76, 3.87, 4.45, 4.70 Se requiere construir un intervalo de confianza del 90% de confianza para el para el rendimiento promedio de la pintura. De la muestra obtenemos que

$$\bar{X} = 4.51$$

$$S^2 = 0.734675$$

De la tabla de $t$ se obtiene $t_{0.05}(8) = 1.86$.

Por lo que los límites del intervalo al 90% de confianza son:

$$L_i = 4.51 - 1.86 * \frac{\sqrt{.734675}}{3} = 3.97$$

$$L_s = 4.51 + 1.86 * \frac{\sqrt{.734675}}{3} = 5.04$$

Para calcular el intervalo al 95% de confianza se requiere el valor de tablas de $t_{.025}(8) = 2.306$ y los límites son:

$$L_i = 4.51 - 2.306 * \frac{\sqrt{.734675}}{3} = 3.85$$

$$L_s = 4.51 + 2.306 * \frac{\sqrt{.734675}}{3} = 5.16$$

En este ejemplo notamos que a mayor confianza mayor longitud del intervalo. Entonces se puede decir que para un mismo tamaño de muestra la longitud del intervalo aumenta si aumenta el nivel de confianza. Si se mantiene fijo el nivel de confianza y se aumenta el tamaño de muestra la longitud del intervalo disminuye, como efecto de que la varianza estimada disminuye.

**Ejemplo.** Una muestra de 100 empleados se seleccionó y se registraron sus salarios y se encontró que $\bar{y} = 7750$ y se sabe de estudios similares que $\sigma = 900$

Encontrar el intervalo del 95% de confianza para el salario promedio $\mu$. Los límites del intervalo del 95% serían

$$\bar{y} \pm 1.96\sigma/\sqrt{n}$$

Se obtiene $7750 \pm \frac{(1.96)900}{\sqrt{100}}$ o $7750 \pm 176.40$

El salario de los empleados de esa compañía está en el intervalo $(7573.60, 7926.40)$ con un coefiente de confianza de 0.95

NOTA.- Si se trabaja con una $N$ grande los valores de $z_{\alpha/2}$ y $t_{\alpha/2}$ son muy parecidos así que los valores de $t$ se pueden aproximar por los de $z$.

## Intervalo de confianza para una media usando aproximación normal

En el teorema central del límite se vió que para una muestra aleatoria de una distribución con media $\mu$ y varianza $\sigma^2$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \dot{\sim} N(0,1), \text{ para } n \text{ grande}$$

entonces se pueden encontrar valores $-z_{\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$ tales que

$$\mathbb{P}\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Lo cual es equivalente a

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Entonces el límite superior de confianza es

$$\bar{X} + z_{\alpha/2}\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

y el límite inferior de confianza es

$$\bar{X} - z_{\alpha/2}\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

En este caso se tiene el problema de que generalmente $\sigma^2$ no se conoce el uso de $S$ en vez de $\sigma$ no modifica el resultado obtenido de manera apreciable ya que se esta trabajando con $n$ grande y $S^2$ es un estimador insesgado y consistente de $\sigma^2$

## Intervalo de confianza para diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$

Para el caso en que nos interese comparar dos poblaciones, digamos, si se desea comparar la producción promedio de dos máquinas, o comparar dos métodos de enseñanza o algo tan sencillo como la talla en niños y niñas; en esos casos un diseño nos llevará a tomar dos muestras que pueden o no ser del misma tamaño y pueden o no ser independientes, en este curso sólo trabajaremos con muestras **independientes** o no apareadas.

Si se tienen dos muestras aleatorias independientes, $X_1, \ldots, X_n$ y $Y_1, \ldots, Y_m$ de $N\left(\mu_X, \sigma^2\right)$ y $N\left(\mu_Y, \sigma^2\right)$ respectivamente (ojo es importante hacer notar que ambas normales tiene a $\sigma^2$ como varianza). Se tiene que $\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}\right)$

Conociendo la distribución de $\bar{X} - \bar{Y}$ y siguiendo los pasos que se hicieron para el intervalo para la media podemos encontrar los límites inferior y superior del intervalos de confianza. Sin embargo al igual que en caso del intervalo para $\mu$ generalmente se desconoce $\sigma^2$, y hay que estimarla. Bajo la suposición de que ambas poblaciones tienen la misma varianza, el estimador para $\sigma^2$ debe incorporar la información de las dos muestras y debe tomar encuenta que el tamaño y la media de las dos muestras pueden ser diferentes. El estimador que se usa para $\sigma^2$ es:

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2},$$

Si se sustituye el valor de $\sigma^2$ por el de $S_p^2$ la distribución de $\bar{X} - \bar{Y}$ ya no es normal sino $t$ de Student con $(n+m-2)$ grados de libertad (aquí los grados de libertad son menos dos porque se estima la media y la varianza).

El intervalo para $\mu_X - \mu_Y$ al $(1-\alpha)\%$ de confianza es:

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - \sqrt{S_p^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}t_{\alpha/2}(n+m-2), \bar{X} - \bar{Y} + \sqrt{S_p^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}t_{\alpha/2}(n+m-2)\right]$$

**Ejemplo.** Se entrenaron dos grupos de nueve empleados nuevos, uno usando el método tradicional y el otro con un método nuevo. Se midió en minutos el tiempo que tardó cada empleado en montar el dispositivo de interés. Los resultados fueron:

| Procedimiento | Mediciones | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| tradicional | 32 | 37 | 35 | 28 | 41 | 44 | 35 | 31 | 34 |
| nuevo | 35 | 31 | 29 | 25 | 34 | 40 | 27 | 32 | 31 |

Haciendo operaciones se tiene:

$$\bar{y}_1 = 35.22 \quad \bar{y}_2 = 31.56$$

$$S^2 = \frac{195.56 + 160.22}{9 + 9 - 2} = 22.24, \quad s = 4.71$$

Para un intervalo del 95% de confianza el valor de tablas que se necesita es $t_{0.025} = 2.120$ y corresponde a una $t$ de student con 16 g.l. Sustituyendo estos valores el intervalo queda

$$(35.22 - 31.56) \pm (2.120)(4.71)\sqrt{(1/9) + (1/9)} = \ 3.66 \pm 4.71$$

En este caso el intervalo incluye al cero por lo que no puede concluirse que existe una diferencia entre los métodos.

**Ejemplo.** Se hizo una comparación sobre las cualidades de duración de dos tipos de llantas, se rodaron $n_1 = n_2 = 100$ llantas de cada tipo. Se registró el número de kilómetros hasta que se notara un desgaste predeterminado. Los resultados fueron los siguientes:

$$\bar{y}_1 = 26400, \ \bar{y}_2 = 25100, \ s_1^2 = 1440000, \ s_2^2 = 1960000,$$

Calcular el intervalo de 99% de confianza.

En este ejemplo es importante notar que supondremos que ambas poblaciones tienen la misma varianza; para que los resultados que obtengamos sean válidos debe probarse estadísticamente que ambas muestras provienen de distribuciones con la misma varianza, por la brevedad del curso esto no severá aquí. Por otro lado los tamaños de muestra son grandes por lo que se puede utilizar la tabla normal en vez de la de $t$ de Student.

Haciendo operaciones se tiene

$$\bar{y}_1 - \bar{y}_2 = l300,$$

$$\hat{\sigma}_{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)} = \sqrt{\frac{s_1}{n_1} + \frac{s_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{1440000}{100} + \frac{1960000}{100}} = \sqrt{3400} = 184$$

$Z_{0.005} = 2.58$ y el intervalo es (825,1775).

Por lo tanto concluimos que sí existe diferencia entre el tipo de llantas, pues el cero no está contenido en el intervalo.

## Tamaño de muestra para estimar la media poblacional

El diseño de un experimento es esencialmente un proyecto para obtener información que como cualquier otro servicio se puede obtener a diferentes precios que depende de la manera en que se obtuvieron los datos. Algunas mediciones contienen una gran cantidad de información con respecto al parámetro, mientras que otras pueden contener poca o ninguna información.

El procedimiento de muestreo afecta la cantidad de información por medición. Esto, junto con el tamaño de la muestra, controla la cantidad total de la información relevante en una muestra. En esta sección se pondrá atención en el tamaño de muestra. ¿Cuántas observaciones hay que incluir en la muestra? La respuesta depende de la exactitud que desea el experimentador. Esta exactitud se puede establecer fijando un límite de error de estimación. El error de estimación $E.E$ se define como la distancia entre el parámetro y el estimador, es decir:

$$E.E = |\hat{\theta} - \theta|$$

La probabilidad que se tiene de que el $E.E$ sea menor que la cantidad $d$ determina la confianza que se tiene de que esto suceda. Es decir, si

$$\mathbb{P}\left(|\hat{\theta} - \theta| < d\right) = 1 - \alpha$$

se dice que hay una confianza del $(1-\alpha) \times 100\%$ de que el error de estimación sea menor que $d$. A continuación se verá como con esta expresión podemos calcular el tamaño de muestra

### Tamaño de muestra para estimar una media

Si se desea con una confianza del $100(1-\alpha)\%$ que el error $|\bar{X}-\mu|$ no exceda una cantidad $d$, el tamaño de muestra se puede obtener de la siguiente manera:

$$\mathbb{P}\left(|\bar{X}-\mu| \leq d\right) = 1-\alpha$$

Haciendo operaciones se tiene

$$\mathbb{P}\left(-\frac{d}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{d}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

Suponiendo normalidad en la distribución de los datos, el término de enmedio tiene la forma de una variable estandarizada, así que $n$ puede elegirse de manera que

$$\frac{d}{\sigma\sqrt{n}} \geq z_{\alpha/2},$$

haciendo operaciones se tiene

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{d}\right)^2$$

Sabiendo que $n$ debe ser entero, se elige el entero inmediato superior a esa cantidad es decir:

$$n = \left[\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{d}\right]^2$$

El valor de $\sigma$ puede obtenerse de alguna investigación previa o estimarse de una encuesta piloto.

**Ejemplo.** Un psicólogo desea estimar el tiempo medio de reacción a un determinado estímulo. El supone que la desviación estándar de las mediciones es 0.05 segundos. Compruebe que para tener una confianza de 95% de que el $E.E$ no exceda de 0.01 segundos, el psicólogo debe obtener 96 mediciones. Suponiendo que las mediciones forman una muestra al azar. Se tiene que $Z_{\alpha/2} = 1.96, \sigma = 0.05$ y $d = 0.01$, entonces $n = (1.96(0.05)/0.01)^2 = 96$

## Pruebas de hipótesis

### Planteamiento general de las hipótesis estadísticas

Una **prueba de hipótesis** es una forma de hacer inferencia sobre una propiedad que **suponemos se cumple para una población** y queremos ver si es compatible con lo observado en una muestra de dicha población.

Primero consideramos una **hipótesis nula** $H_0$ y una **hipótesis alternativa** $H_1$, e intentamos tener una regla de decisión para ver cuál de las dos es la hipótesis verdadera, al aplicar el problema estadístico a un cierto número de experimentos.

A partir de una muestra de la población, se extrae un estadístico (un estadístico se define como una función de la muestra) cuya distribución de probabilidad esté relacionada con la hipótesis en estudio y sea conocida.

Las hipótesis pueden clasificarse en dos grupos:

1. Paramétricas: En estas pruebas uno trata de determinar un valor concreto o un intervalo para los parámetros de una distribución .

2. No paramétricas: En estas pruebas uno trata de determinen el tipo de distribución de probabilidad que ha generado los datos.

Aunque la metodología para realizar pruebas de hipótesis son parecidas en ambos casos, distinguir ambos tipos de hipótesis es importante puesto que muchos problemas de pruebas de hipótesis **paramétricos** son, en realidad, problemas de estimación, que tienen una respuesta dando un intervalo de confianza para dicho parámetro. Por otro lado, las pruebas de hipótesis **no paramétricas** se usan para validar un modelo estadístico.

A continuación describirémos los pasos para hacer pruebas de hipótesis paramétricas:

1. Tenemos una variable aleatoria que describe algún fenómeno de interés $X$ , con función de distribución $F(x;\theta)$, discreta o continua, donde $\theta$ es un parámetro fijo pero desconocido.
2. Nosotros sabemos que el parámetro vive en un espacio paramétrico, $\theta \in \Theta$ y por lo tanto, para cada valor de $\theta$, la función de distribución $F(x;\theta)$ es distinta.
3. Una hipótesis estadística sobre el parámetro es una conjetura sobre los valores que pueda tomar.

El establecimiento de una hipótesis sobre $\theta$ supone dividir su espacio paramétrico $\Theta$ en dos conjuntos $\Theta_0$ y $\Theta_1$ disjuntos, es decir, $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ y $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$. A $H_0 : \theta \in \Theta_0$ la denominamos hipótesis nula y, a la otra, hipótesis alternativa $H_1 : \theta \in \Theta_1$.

**Contraste de hipótesis**

Un contraste o prueba de hipótesis es una regla de decisión mediante la cual optamos por una u otra hipótesis, a la luz de la información proporcionada por una muestra extraída de la población objeto de estudio.

El procedimiento para llevar a cabo un contraste es el siguiente:

1. Se busca una partición del espacio muestral $\mathcal{X}$ de la variable aleatoria $X$ en dos subconjuntos disjuntos, $C$ y $C^\star$. A $C$ lo llamamos la **región crítica**, mientras que a $C^\star$ le llamaremos la **región de aceptación.**
2. a partir de una muestra $\underline{X}$ vemos si pertenece a $C$, o por el contrario, $\underline{X}$ pertenece al subconjunto complementario $C^\star$.

El rechazo de la hipótesis nula equivale a la aceptación de la alternativa, y viceversa. Debiendo entender la aceptación o rechazo de una hipótesis en el sentido que la muestra ha proporcionado evidencia suficiente, pero no absoluta, para que sea razonable la aceptación o el rechazo de la hipótesis.

**Ejemplo**

El peso de un producto varia entre 1 y 4 kg y puede distribuirse con media 2 kg o 3 kg. Se toma una muestra aleatoria de tamaño uno, si el peso es mayor que 2.6 kg se rechaza la hipótesis que la media sea igual a 2 kg y se acepta, por consiguiente, que sea igual a 3 kg.

El espacio muestral $\mathcal{X}$ es el intervalo $[1,4]$, la región crítica el subintervalo C $= [2.6, 4]$ y la región de aceptación el subintervalo $C^\star = [1, 2.6)$, de tal forma que $X = C^\star \cup C = [1, 2.6) \cup [2.6, 4] = [1, 4]$.

## Tipos de error

Una vez realizada la prueba de hipótesis, se habrá optado por una de las dos hipótesis, $H_0$ o $H_1$, y pueden pasar alguno de los cuatro casos siguiente

| | | Hipótesis cierta | |
|---|---|---|---|
| | | $H_0$ es cierta | $H_1$ es cierta |
| Decisión tomada | aceptar $H_0$ | No hay error | Error de tipo II |
| | no aceptar $H_0$ | Error de tipo I | No hay error |

A la probabilidad de cometer el error de tipo I se suele denotar por $\alpha$ y a este valor se le conoce como el **nivel de significancia**, mientras que la probabilidad de cometer el error de tipo II, lo denotaremos como $\beta$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{escoger } H_1 | H_0 \text{ es cierta}) &= \alpha,\\ \mathbb{P}(\text{escoger } H_0 | H_1 \text{ es cierta}) &= \beta.\end{aligned}$$

La potencia del contraste es el valor $1-\beta$, esto es, a la probabilidad de escoger $H_1$ cuando ésta es cierta

$$\mathbb{P}(\text{escoger } H_1|H_1 \text{ es cierta}) \quad = \quad 1-\beta.$$

**Ejemplo**

En una población $N(\mu, 4)$ deseamos realizar el siguiente contraste $H_0: \mu = 1$ vs $H_1: \mu = 4$.

Se toma una muestra aleatoria de tamaño uno y se nos dicen que región crítica es el intervalo $C = [2, \infty)$, en otras palabras, si el valor muestral mayor o igual 2 se rechaza $H_0$, en caso contrario se acepta. Veamos cual es su nivel de significancia, $\alpha$ y cual es la potencia de este contraste.

$$\begin{aligned}
\alpha &= \mathbb{P}(\text{Error de Tipo 1}) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \geq 2|N(1,4)) \\
&= \mathbb{P}(1+2Z \geq 2) = \mathbb{P}(N(0,1) \geq 0.5) = 0.308
\end{aligned}$$

con lo cual comprobamos que, efectivamente, aunque no sepamos si la elección ha sido acertada o no, disponemos de un criterio de información.

Ahora calculemos la probabilidad del error de Tipo II,

$$\begin{aligned}
\beta &= \mathbb{P}(\text{error de Tipo II}) \\
&= \mathbb{P}(x_1 < 2|N(4,4)) \\
&= \mathbb{P}(4+2Z < 2) = \mathbb{P}(N(0,1) < -1) = 0.15,
\end{aligned}$$

donde $Z \sim N(0,1)$.

Usualmente, se diseñan los contrastes a un nivel de significancia fijo $\alpha = 0.05$ (5%), aunque a veces se usan al 10% (0.1) o 1% (0.01) para adoptar condiciones más relajadas o más estrictas.

Definamos a el valor P , p-valor o p-value como la probabilidad[9] de obtener un resultado al menos tan extremo como el que realmente se ha obtenido, **suponiendo que la hipótesis nula es cierta**.

En pocas palabras, se rechaza la hipótesis nula $H_0$ si el p-valor asociado al resultado observado es igual o menor que el nivel de significancia $\alpha$ establecido, convencionalmente 0.05, 0.1 ó 0.01.

## Prueba de hipótesis sobre la media y la proporcion

La prueba de la $t$ se basan en la suposición de que los datos proceden de una distribución normal con $\sigma^2$desconocida y queremos hacer una prueba de hipótesis sobre $\mu$.

Supongamos que tenemos una muestra $\{X_1, ..., X_n\}$ generada como variables aleatorias independientes con distribución $N(\mu, \sigma^2)$, y deseamos probar la hipótesis nula $H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu \neq \mu_0$.

Estimamos los parámetros $\mu$ y $\sigma$ como $\bar{X}$ y $S$ y nuestro estadístico de prueba es

$$t(\bar{x}) = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}.$$

Nuestra regla de decisión será: rechazamos $H_0$ al nivel de significancia $\alpha$ si $|t(\bar{x})| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

[9] El p-value es un número entre 0 y 1

**Ejemplo**

Supongamos que tenemos el registro de 11 días del consumo diario de energía en kcal de un deportista: 5260, 5470, 5640, 6180, 6390, 6515, 6805, 7515, 7515, 8230, 8770. El entrenador del deportista quiere hacer la siguiente prueba de hipótesis

$$H_0 : \mu_0 = 7725 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu_1 \neq 7725,$$

suponiendo que los datos siguen una distribución normal y con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

De los datos tenemos que $\bar{x} = 6753.636$ $s = 1142.123$, entoces al usar el estadístico tenemos que

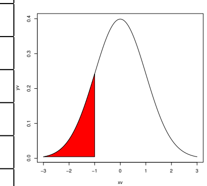
$$t(X) = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{6753.636 - 7725_0}{\frac{1142.123}{\sqrt{11}}} = -2.8208,$$

y por otro lado $t_{0.025}(10) = 2.2281$, entonces como $|-2.8208| > 2.2281$ rechazamos $H_0$.
Ahora vamos a calcular p-value. Si suponemos que $H_0 : \mu_0 = 7725$ es cierto entonces $\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$, y la probabilidad del evento $|t_{10}| \geq |-2.2281|$, es $\mathbb{P}\left(|t_{10}| \geq |-2.2281|\right) = 0.01814$; y como esta probabilidad es menor al nivel de significancia, rechazamos $H_0$.

# Apéndice

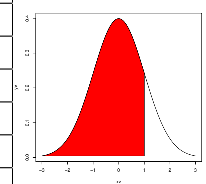
## Tablas de la Distribución para la normal estándar

| | 0 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3.6 | 0.00016 | 0.00015 | 0.00015 | 0.00014 | 0.00014 | 0.00013 | 0.00013 | 0.00012 | 0.00012 | 0.00011 |
| -3.5 | 0.00023 | 0.00022 | 0.00022 | 0.00021 | 0.0002 | 0.00019 | 0.00019 | 0.00018 | 0.00017 | 0.00017 |
| -3.4 | 0.00034 | 0.00032 | 0.00031 | 0.0003 | 0.00029 | 0.00028 | 0.00027 | 0.00026 | 0.00025 | 0.00024 |
| -3.3 | 0.00048 | 0.00047 | 0.00045 | 0.00043 | 0.00042 | 0.0004 | 0.00039 | 0.00038 | 0.00036 | 0.00035 |
| -3.2 | 0.00069 | 0.00066 | 0.00064 | 0.00062 | 0.0006 | 0.00058 | 0.00056 | 0.00054 | 0.00052 | 0.0005 |
| -3.1 | 0.00097 | 0.00094 | 0.0009 | 0.00087 | 0.00084 | 0.00082 | 0.00079 | 0.00076 | 0.00074 | 0.00071 |
| -3 | 0.00135 | 0.00131 | 0.00126 | 0.00122 | 0.00118 | 0.00114 | 0.00111 | 0.00107 | 0.00104 | 0.001 |
| -2.9 | 0.00187 | 0.00181 | 0.00175 | 0.00169 | 0.00164 | 0.00159 | 0.00154 | 0.00149 | 0.00144 | 0.00139 |
| -2.8 | 0.00256 | 0.00248 | 0.0024 | 0.00233 | 0.00226 | 0.00219 | 0.00212 | 0.00205 | 0.00199 | 0.00193 |
| -2.7 | 0.00347 | 0.00336 | 0.00326 | 0.00317 | 0.00307 | 0.00298 | 0.00289 | 0.0028 | 0.00272 | 0.00264 |
| -2.6 | 0.00466 | 0.00453 | 0.0044 | 0.00427 | 0.00415 | 0.00402 | 0.00391 | 0.00379 | 0.00368 | 0.00357 |
| -2.5 | 0.00621 | 0.00604 | 0.00587 | 0.0057 | 0.00554 | 0.00539 | 0.00523 | 0.00508 | 0.00494 | 0.0048 |
| -2.4 | 0.0082 | 0.00798 | 0.00776 | 0.00755 | 0.00734 | 0.00714 | 0.00695 | 0.00676 | 0.00657 | 0.00639 |
| -2.3 | 0.01072 | 0.01044 | 0.01017 | 0.0099 | 0.00964 | 0.00939 | 0.00914 | 0.00889 | 0.00866 | 0.00842 |
| -2.2 | 0.0139 | 0.01355 | 0.01321 | 0.01287 | 0.01255 | 0.01222 | 0.01191 | 0.0116 | 0.0113 | 0.01101 |
| -2.1 | 0.01786 | 0.01743 | 0.017 | 0.01659 | 0.01618 | 0.01578 | 0.01539 | 0.015 | 0.01463 | 0.01426 |
| -2 | 0.02275 | 0.02222 | 0.02169 | 0.02118 | 0.02068 | 0.02018 | 0.0197 | 0.01923 | 0.01876 | 0.01831 |
| -1.9 | 0.02872 | 0.02807 | 0.02743 | 0.0268 | 0.02619 | 0.02559 | 0.025 | 0.02442 | 0.02385 | 0.0233 |
| -1.8 | 0.03593 | 0.03515 | 0.03438 | 0.03362 | 0.03288 | 0.03216 | 0.03144 | 0.03074 | 0.03005 | 0.02938 |
| -1.7 | 0.04457 | 0.04363 | 0.04272 | 0.04182 | 0.04093 | 0.04006 | 0.0392 | 0.03836 | 0.03754 | 0.03673 |
| -1.6 | 0.0548 | 0.0537 | 0.05262 | 0.05155 | 0.0505 | 0.04947 | 0.04846 | 0.04746 | 0.04648 | 0.04551 |
| -1.5 | 0.06681 | 0.06552 | 0.06426 | 0.06301 | 0.06178 | 0.06057 | 0.05938 | 0.05821 | 0.05705 | 0.05592 |
| -1.4 | 0.08076 | 0.07927 | 0.0778 | 0.07636 | 0.07493 | 0.07353 | 0.07215 | 0.07078 | 0.06944 | 0.06811 |
| -1.3 | 0.0968 | 0.0951 | 0.09342 | 0.09176 | 0.09012 | 0.08851 | 0.08692 | 0.08534 | 0.08379 | 0.08226 |
| -1.2 | 0.11507 | 0.11314 | 0.11123 | 0.10935 | 0.10749 | 0.10565 | 0.10383 | 0.10204 | 0.10027 | 0.09853 |
| -1.1 | 0.13567 | 0.1335 | 0.13136 | 0.12924 | 0.12714 | 0.12507 | 0.12302 | 0.121 | 0.119 | 0.11702 |
| -1 | 0.15866 | 0.15625 | 0.15386 | 0.15151 | 0.14917 | 0.14686 | 0.14457 | 0.14231 | 0.14007 | 0.13786 |
| -0.9 | 0.18406 | 0.18141 | 0.17879 | 0.17619 | 0.17361 | 0.17106 | 0.16853 | 0.16602 | 0.16354 | 0.16109 |
| -0.8 | 0.21186 | 0.20897 | 0.20611 | 0.20327 | 0.20045 | 0.19766 | 0.19489 | 0.19215 | 0.18943 | 0.18673 |
| -0.7 | 0.24196 | 0.23885 | 0.23576 | 0.2327 | 0.22965 | 0.22663 | 0.22363 | 0.22065 | 0.2177 | 0.21476 |
| -0.6 | 0.27425 | 0.27093 | 0.26763 | 0.26435 | 0.26109 | 0.25785 | 0.25463 | 0.25143 | 0.24825 | 0.2451 |
| -0.5 | 0.30854 | 0.30503 | 0.30153 | 0.29806 | 0.2946 | 0.29116 | 0.28774 | 0.28434 | 0.28096 | 0.2776 |
| -0.4 | 0.34458 | 0.3409 | 0.33724 | 0.3336 | 0.32997 | 0.32636 | 0.32276 | 0.31918 | 0.31561 | 0.31207 |
| -0.3 | 0.38209 | 0.37828 | 0.37448 | 0.3707 | 0.36693 | 0.36317 | 0.35942 | 0.35569 | 0.35197 | 0.34827 |
| -0.2 | 0.42074 | 0.41683 | 0.41294 | 0.40905 | 0.40517 | 0.40129 | 0.39743 | 0.39358 | 0.38974 | 0.38591 |
| -0.1 | 0.46017 | 0.4562 | 0.45224 | 0.44828 | 0.44433 | 0.44038 | 0.43644 | 0.43251 | 0.42858 | 0.42465 |

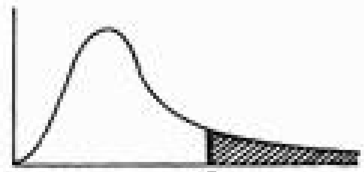


### Continuación de la Tablas de la Distribución para la normal estándar

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.5 | 0.50399 | 0.50798 | 0.51197 | 0.51595 | 0.51994 | 0.52392 | 0.5279 | 0.53188 | 0.53586 |
| 0.1 | 0.53983 | 0.5438 | 0.54776 | 0.55172 | 0.55567 | 0.55962 | 0.56356 | 0.56749 | 0.57142 | 0.57535 |
| 0.2 | 0.57926 | 0.58317 | 0.58706 | 0.59095 | 0.59483 | 0.59871 | 0.60257 | 0.60642 | 0.61026 | 0.61409 |
| 0.3 | 0.61791 | 0.62172 | 0.62552 | 0.6293 | 0.63307 | 0.63683 | 0.64058 | 0.64431 | 0.64803 | 0.65173 |
| 0.4 | 0.65542 | 0.6591 | 0.66276 | 0.6664 | 0.67003 | 0.67364 | 0.67724 | 0.68082 | 0.68439 | 0.68793 |
| 0.5 | 0.69146 | 0.69497 | 0.69847 | 0.70194 | 0.7054 | 0.70884 | 0.71226 | 0.71566 | 0.71904 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.72575 | 0.72907 | 0.73237 | 0.73565 | 0.73891 | 0.74215 | 0.74537 | 0.74857 | 0.75175 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.75804 | 0.76115 | 0.76424 | 0.7673 | 0.77035 | 0.77337 | 0.77637 | 0.77935 | 0.7823 | 0.78524 |
| 0.8 | 0.78814 | 0.79103 | 0.79389 | 0.79673 | 0.79955 | 0.80234 | 0.80511 | 0.80785 | 0.81057 | 0.81327 |
| 0.9 | 0.81594 | 0.81859 | 0.82121 | 0.82381 | 0.82639 | 0.82894 | 0.83147 | 0.83398 | 0.83646 | 0.83891 |
| 1 | 0.84134 | 0.84375 | 0.84614 | 0.84849 | 0.85083 | 0.85314 | 0.85543 | 0.85769 | 0.85993 | 0.86214 |
| 1.1 | 0.86433 | 0.8665 | 0.86864 | 0.87076 | 0.87286 | 0.87493 | 0.87698 | 0.879 | 0.881 | 0.88298 |
| 1.2 | 0.88493 | 0.88686 | 0.88877 | 0.89065 | 0.89251 | 0.89435 | 0.89617 | 0.89796 | 0.89973 | 0.90147 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.90658 | 0.90824 | 0.90988 | 0.91149 | 0.91308 | 0.91466 | 0.91621 | 0.91774 |
| 1.4 | 0.91924 | 0.92073 | 0.9222 | 0.92364 | 0.92507 | 0.92647 | 0.92785 | 0.92922 | 0.93056 | 0.93189 |
| 1.5 | 0.93319 | 0.93448 | 0.93574 | 0.93699 | 0.93822 | 0.93943 | 0.94062 | 0.94179 | 0.94295 | 0.94408 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.94738 | 0.94845 | 0.9495 | 0.95053 | 0.95154 | 0.95254 | 0.95352 | 0.95449 |
| 1.7 | 0.95543 | 0.95637 | 0.95728 | 0.95818 | 0.95907 | 0.95994 | 0.9608 | 0.96164 | 0.96246 | 0.96327 |
| 1.8 | 0.96407 | 0.96485 | 0.96562 | 0.96638 | 0.96712 | 0.96784 | 0.96856 | 0.96926 | 0.96995 | 0.97062 |
| 1.9 | 0.97128 | 0.97193 | 0.97257 | 0.9732 | 0.97381 | 0.97441 | 0.975 | 0.97558 | 0.97615 | 0.9767 |
| 2 | 0.97725 | 0.97778 | 0.97831 | 0.97882 | 0.97932 | 0.97982 | 0.9803 | 0.98077 | 0.98124 | 0.98169 |
| 2.1 | 0.98214 | 0.98257 | 0.983 | 0.98341 | 0.98382 | 0.98422 | 0.98461 | 0.985 | 0.98537 | 0.98574 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.98645 | 0.98679 | 0.98713 | 0.98745 | 0.98778 | 0.98809 | 0.9884 | 0.9887 | 0.98899 |
| 2.3 | 0.98928 | 0.98956 | 0.98983 | 0.9901 | 0.99036 | 0.99061 | 0.99086 | 0.99111 | 0.99134 | 0.99158 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.99202 | 0.99224 | 0.99245 | 0.99266 | 0.99286 | 0.99305 | 0.99324 | 0.99343 | 0.99361 |
| 2.5 | 0.99379 | 0.99396 | 0.99413 | 0.9943 | 0.99446 | 0.99461 | 0.99477 | 0.99492 | 0.99506 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.99534 | 0.99547 | 0.9956 | 0.99573 | 0.99585 | 0.99598 | 0.99609 | 0.99621 | 0.99632 | 0.99643 |
| 2.7 | 0.99653 | 0.99664 | 0.99674 | 0.99683 | 0.99693 | 0.99702 | 0.99711 | 0.9972 | 0.99728 | 0.99736 |
| 2.8 | 0.99744 | 0.99752 | 0.9976 | 0.99767 | 0.99774 | 0.99781 | 0.99788 | 0.99795 | 0.99801 | 0.99807 |
| 2.9 | 0.99813 | 0.99819 | 0.99825 | 0.99831 | 0.99836 | 0.99841 | 0.99846 | 0.99851 | 0.99856 | 0.99861 |
| 3 | 0.99865 | 0.99869 | 0.99874 | 0.99878 | 0.99882 | 0.99886 | 0.99889 | 0.99893 | 0.99896 | 0.999 |
| 3.1 | 0.99903 | 0.99906 | 0.9991 | 0.99913 | 0.99916 | 0.99918 | 0.99921 | 0.99924 | 0.99926 | 0.99929 |
| 3.2 | 0.99931 | 0.99934 | 0.99936 | 0.99938 | 0.9994 | 0.99942 | 0.99944 | 0.99946 | 0.99948 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.99952 | 0.99953 | 0.99955 | 0.99957 | 0.99958 | 0.9996 | 0.99961 | 0.99962 | 0.99964 | 0.99965 |
| 3.4 | 0.99966 | 0.99968 | 0.99969 | 0.9997 | 0.99971 | 0.99972 | 0.99973 | 0.99974 | 0.99975 | 0.99976 |
| 3.5 | 0.99977 | 0.99978 | 0.99978 | 0.99979 | 0.9998 | 0.99981 | 0.99981 | 0.99982 | 0.99983 | 0.99983 |
| 3.6 | 0.99984 | 0.99985 | 0.99985 | 0.99986 | 0.99986 | 0.99987 | 0.99987 | 0.99988 | 0.99988 | 0.99989 |



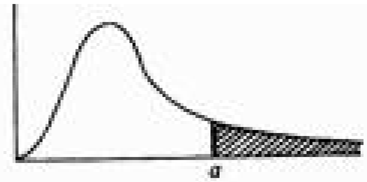
$\mathbb{P}\left(\chi^2 \geq a\right)$




| Grados de libertad | Probabilidades | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,99 | 0,975 | 0,95 | 0,90 | 0,75 | 0,50 | 0,25 | 0,10 | 0,05 | 0,025 | 0,01 |
| 1 | 1,571* | 9,821* | 39,320* | 0,016 | 0,102 | 0,455 | 1,323 | 2,706 | 3,841 | 5,024 | 6,635 |
| 2 | 0,020 | 0,051 | 0,103 | 0,211 | 0,575 | 1,386 | 2,773 | 4,605 | 5,991 | 7,378 | 9,210 |
| 3 | 0,115 | 0,216 | 0,352 | 0,584 | 1,213 | 2,366 | 4,108 | 6,251 | 7,815 | 9,348 | 11,345 |
| 4 | 0,297 | 0,484 | 0,717 | 1,064 | 1,923 | 3,357 | 5,385 | 7,779 | 9,488 | 11,143 | 13,277 |
| 5 | 0,554 | 0,831 | 1,145 | 1,610 | 2,675 | 4,351 | 6,626 | 9,236 | 11,070 | 12,833 | 15,086 |
| 6 | 0,872 | 1,237 | 1,635 | 2,204 | 3,455 | 5,348 | 7,841 | 10,645 | 12,592 | 14,449 | 16,812 |
| 7 | 1,239 | 1,690 | 2,167 | 2,833 | 4,255 | 6,346 | 9,037 | 12,017 | 14,067 | 16,013 | 18,475 |
| 8 | 1,646 | 2,180 | 2,733 | 3,490 | 5,071 | 7,344 | 10,219 | 13,362 | 15,507 | 17,535 | 20,090 |
| 9 | 2,088 | 2,700 | 3,325 | 4,168 | 5,899 | 8,343 | 11,389 | 14,684 | 16,919 | 19,023 | 21,666 |
| 10 | 2,558 | 3,247 | 3,940 | 4,865 | 6,737 | 9,342 | 12,549 | 15,987 | 18,307 | 20,483 | 23,209 |
| 11 | 3,053 | 3,816 | 4,575 | 5,578 | 7,584 | 10,341 | 13,701 | 17,275 | 19,675 | 21,920 | 24,725 |
| 12 | 3,571 | 4,404 | 5,226 | 6,304 | 8,438 | 11,340 | 14,845 | 18,549 | 21,026 | 23,337 | 26,217 |
| 13 | 4,107 | 5,009 | 5,892 | 7,041 | 9,299 | 12,340 | 15,984 | 19,812 | 22,362 | 24,736 | 27,688 |
| 14 | 4,660 | 5,629 | 6,571 | 7,790 | 10,165 | 13,339 | 17,117 | 21,064 | 23,685 | 26,119 | 29,141 |
| 15 | 5,229 | 6,262 | 7,261 | 8,547 | 11,036 | 14,339 | 18,245 | 22,307 | 24,996 | 24,788 | 30,578 |
| 16 | 5,812 | 6,908 | 7,962 | 9,312 | 11,912 | 15,338 | 19,369 | 23,542 | 26,296 | 28,845 | 32,000 |
| 17 | 6,408 | 7,564 | 8,672 | 10,085 | 12,792 | 16,338 | 20,489 | 24,769 | 27,587 | 30,191 | 33,409 |
| 18 | 7,015 | 8,231 | 9,390 | 10,865 | 13,675 | 17,338 | 21,605 | 25,989 | 28,869 | 31,526 | 34,805 |
| 19 | 7,633 | 8,907 | 10,117 | 11,651 | 14,562 | 18,338 | 22,718 | 27,204 | 30,143 | 32,852 | 36,191 |

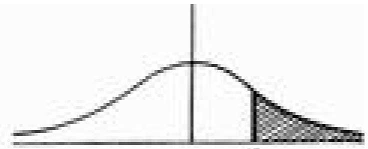
* Dividir entre 1000.

$\mathbb{P}\left(\boldsymbol{\chi^2} \geq \boldsymbol{a}\right)$



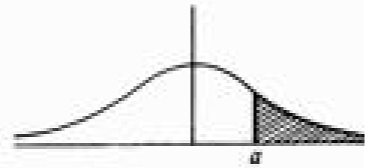

| *Grados de libertad* | *Probabilidades* | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,99 | 0,975 | 0,95 | 0,90 | 0,75 | 0,50 | 0,25 | 0,10 | 0,05 | 0,025 | 0,01 |
| 20 | 8,260 | 9,591 | 10,851 | 12,443 | 15,452 | 19,337 | 23,828 | 28,412 | 31,410 | 34,170 | 37,566 |
| 21 | 8,897 | 10,283 | 11,591 | 13,240 | 16,344 | 20,337 | 24,935 | 29,615 | 32,670 | 35,479 | 38,932 |
| 22 | 9,542 | 10,982 | 12,338 | 14,041 | 17,240 | 21,337 | 26,039 | 30,813 | 33,924 | 36,781 | 40,289 |
| 23 | 10,196 | 11,688 | 13,090 | 14,848 | 18,137 | 22,337 | 27,141 | 32,007 | 35,172 | 38,076 | 41,638 |
| 24 | 10,856 | 12,401 | 13,848 | 15,659 | 19,037 | 23,337 | 28,241 | 33,196 | 36,415 | 39,364 | 42,080 |
| 25 | 11,524 | 13,120 | 14,611 | 16,473 | 19,939 | 24,337 | 29,339 | 34,382 | 37,652 | 40,646 | 44,314 |
| 26 | 12,198 | 13,844 | 15,379 | 17,292 | 20,843 | 25,336 | 30,434 | 35,563 | 38,885 | 41,923 | 45,642 |
| 27 | 12,879 | 14,573 | 16,151 | 18,114 | 21,749 | 26,336 | 31,528 | 36,741 | 40,113 | 43,194 | 46,963 |
| 28 | 13,565 | 15,308 | 16,928 | 18,939 | 22,657 | 27,336 | 32,620 | 37,916 | 41,337 | 44,461 | 48,278 |
| 29 | 14,256 | 16,047 | 17,708 | 19,768 | 23,567 | 28,336 | 33,711 | 39,087 | 42,557 | 45,722 | 49,588 |
| 30 | 14,954 | 16,791 | 18,493 | 20,599 | 24,478 | 29,336 | 34,800 | 40,256 | 43,773 | 46,979 | 50,892 |
| 40 | 22,164 | 24,433 | 26,509 | 29,050 | 33,660 | 39,335 | 45,616 | 51,805 | 55,758 | 59,342 | 63,691 |
| 50 | 29,707 | 32,357 | 34,764 | 37,689 | 42,942 | 49,335 | 56,334 | 63,167 | 67,505 | 71,420 | 76,154 |
| 60 | 37,485 | 40,482 | 43,188 | 46,459 | 52,294 | 59,335 | 66,981 | 74,397 | 79,082 | 83,298 | 88,379 |
| 70 | 45,442 | 48,758 | 51,739 | 55,329 | 61,698 | 69,334 | 77,577 | 85,527 | 90,531 | 95,023 | 100,425 |
| 80 | 53,540 | 57,153 | 60,391 | 64,278 | 71,144 | 79,334 | 88,130 | 96,578 | 101,879 | 106,629 | 112,329 |
| 90 | 61,754 | 65,647 | 69,126 | 73,291 | 80,625 | 89,334 | 98,650 | 107,565 | 113,145 | 118,136 | 124,116 |
| 100 | 70,065 | 74,222 | 77,929 | 82,358 | 90,133 | 99,334 | 109,141 | 118,498 | 124,342 | 129,561 | 135,807 |

$\mathbb{P}\left(t_n \geq a\right)$



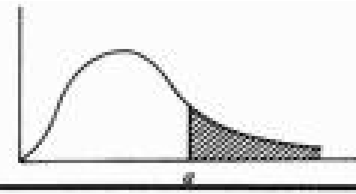

| Grados de libertad | Probabilidades | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,40 | 0,25 | 0,15 | 0,10 | 0,05 | 0,025 | 0,01 | 0,005 |
| 1 | 0,3249 | 1,0000 | 1,9626 | 3,0777 | 6,3138 | 12,7062 | 31,8205 | 63,6567 |
| 2 | 0,2887 | 0,8165 | 1,3862 | 1,8856 | 2,9200 | 4,3027 | 6,9646 | 9,9248 |
| 3 | 0,2767 | 0,7649 | 1,2498 | 1,6377 | 2,3534 | 3,1824 | 4,5407 | 5,8409 |
| 4 | 0,2707 | 0,7407 | 1,1896 | 1,5332 | 2,1318 | 2,7764 | 3,7469 | 4,6041 |
| 5 | 0,2672 | 0,7267 | 1,1558 | 1,4759 | 2,0150 | 2,5706 | 3,3649 | 4,0321 |
| 6 | 0,2648 | 0,7176 | 1,1342 | 1,4398 | 1,9432 | 2,4469 | 3,1427 | 3,7074 |
| 7 | 0,2632 | 0,7111 | 1,1192 | 1,4149 | 1,8946 | 2,3646 | 2,9980 | 3,4995 |
| 8 | 0,2619 | 0,7064 | 1,1081 | 1,3968 | 1,8595 | 2,3060 | 2,8965 | 3,3554 |
| 9 | 0,2610 | 0,7027 | 1,0997 | 1,3830 | 1,8331 | 2,2622 | 2,8214 | 3,2498 |
| 10 | 0,2602 | 0,6998 | 1,0931 | 1,3722 | 1,8125 | 2,2281 | 2,7638 | 3,1693 |
| 11 | 0,2596 | 0,6974 | 1,0877 | 1,3634 | 1,7959 | 2,2010 | 2,7181 | 3,1058 |
| 12 | 0,2590 | 0,6955 | 1,0832 | 1,3562 | 1,7823 | 2,1788 | 2,6810 | 3,0545 |
| 13 | 0,2586 | 0,6938 | 1,0795 | 1,3502 | 1,7709 | 2,1604 | 2,6503 | 3,0123 |
| 14 | 0,2582 | 0,6924 | 1,0763 | 1,3450 | 1,7613 | 2,1448 | 2,6245 | 2,9768 |
| 15 | 0,2579 | 0,6912 | 1,0735 | 1,3406 | 1,7531 | 2,1314 | 2,6025 | 2,9467 |
| 16 | 0,2576 | 0,6901 | 1,0711 | 1,3368 | 1,7459 | 2,1199 | 2,5835 | 2,9208 |
| 17 | 0,2573 | 0,6892 | 1,0690 | 1,3334 | 1,7396 | 2,1098 | 2,5669 | 2,8982 |
| 18 | 0,2571 | 0,6884 | 1,0672 | 1,3304 | 1,7341 | 2,1009 | 2,5524 | 2,8784 |
| 19 | 0,2569 | 0,6876 | 1,0655 | 1,3277 | 1,7291 | 2,0930 | 2,5395 | 2,8609 |
| 20 | 0,2567 | 0,6870 | 1,0640 | 1,3253 | 1,7247 | 2,0860 | 2,5280 | 2,8453 |
| 21 | 0,2566 | 0,6864 | 1,0627 | 1,3232 | 1,7207 | 2,0796 | 2,5176 | 2,8314 |
| 22 | 0.2564 | 0,6858 | 1,0614 | 1,3212 | 1,7171 | 2,0739 | 2,5083 | 2,8188 |

$\mathbb{P}\,(t_n \geq a)$



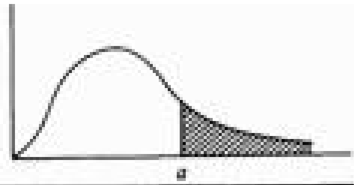

| *Grados de libertad* | *Probabilidades* | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,40 | 0,25 | 0,15 | 0,10 | 0,05 | 0,025 | 0,01 | 0,005 |
| 23 | 0,2563 | 0,6853 | 1,0603 | 1,3195 | 1,7139 | 2,0687 | 2,4999 | 2,8073 |
| 24 | 0,2562 | 0,6848 | 1,0593 | 1,3178 | 1,7109 | 2,0639 | 2,4922 | 2,7969 |
| 25 | 0,2561 | 0,6844 | 1,0584 | 1,3163 | 1,7081 | 2,0595 | 2,4851 | 2,7874 |
| 26 | 0,2560 | 0,6840 | 1,0575 | 1,3150 | 1,7056 | 2,0555 | 2,4786 | 2,7787 |
| 27 | 0,2559 | 0,6837 | 1,0567 | 1,3137 | 1,7033 | 2,0518 | 2,4727 | 2,7707 |
| 28 | 0,2558 | 0,6834 | 1,0560 | 1,3125 | 1,7011 | 2,0484 | 2,4671 | 2,7633 |
| 29 | 0,2557 | 0,6830 | 1,0553 | 1,3114 | 1,6991 | 2,0452 | 2,4620 | 2,7564 |
| 30 | 0,2556 | 0,6828 | 1,0547 | 1,3104 | 1,6973 | 2,0423 | 2,4573 | 2,7500 |
| 35 | 0,2553 | 0,6816 | 1,0520 | 1,3062 | 1,6896 | 2,0301 | 2,4377 | 2,7238 |
| 40 | 0,2550 | 0,6807 | 1,0500 | 1,3031 | 1,6839 | 2,0211 | 2,4233 | 2,7045 |
| 45 | 0,2549 | 0,6800 | 1,0485 | 1,3006 | 1,6794 | 2,0141 | 2,4121 | 2,6896 |
| 50 | 0,2547 | 0,6794 | 1,0473 | 1,2987 | 1,6759 | 2,0086 | 2,4033 | 2,6778 |
| 60 | 0,2545 | 0,6786 | 1,0455 | 1,2958 | 1,6706 | 2,0003 | 2,3901 | 2,6603 |
| 70 | 0,2543 | 0,6780 | 1,0442 | 1,2938 | 1,6669 | 1,9944 | 2,3808 | 2,6479 |
| 80 | 0,2542 | 0,6776 | 1,0432 | 1,2922 | 1,6641 | 1,9901 | 2,3739 | 2,6387 |
| 90 | 0,2541 | 0,6772 | 1,0424 | 1,2910 | 1,6620 | 1,9867 | 2,3685 | 2,6316 |
| 100 | 0,2540 | 0,6770 | 1,0418 | 1,2901 | 1,6602 | 1,9840 | 2,3642 | 2,6259 |
| 120 | 0,2539 | 0,6765 | 1,0409 | 1,2886 | 1,6577 | 1,9799 | 2,3578 | 2,6174 |
| 150 | 0,2538 | 0,6761 | 1,0400 | 1,2872 | 1,6551 | 1,9759 | 2,3515 | 2,6090 |
| 200 | 0,2537 | 0,6757 | 1,0391 | 1,2858 | 1,6525 | 1,9719 | 2,3451 | 2,6006 |
| 300 | 0,2536 | 0,6753 | 1,0382 | 1,2844 | 1,6499 | 1,9679 | 2,3388 | 2,5923 |
| ∞ | 0,2533 | 0,6745 | 1,0364 | 1,2816 | 1,6449 | 1,9600 | 2,3263 | 2,5758 |

$\mathbb{P}\left(F_{m,n} \geq a\right) = 0.25$



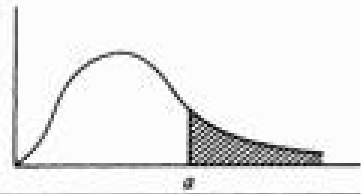

| Grados de libertad del denominador | Grados de libertad del numerador | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| 1 | 5,83 | 7,50 | 8,20 | 8,58 | 8,82 | 8,98 | 9,10 | 9,19 | 9,26 | 9,32 | 9,41 | 9,49 | 9,58 | 9,63 | 9,67 | 9,71 | 9,76 | 9,80 | 9,85 |
| 2 | 2,57 | 3,00 | 3,15 | 3,23 | 3,28 | 3,31 | 3,34 | 3,35 | 3,37 | 3,38 | 3,39 | 3,41 | 3,43 | 3,43 | 3,44 | 3,45 | 3,46 | 3,47 | 3,48 |
| 3 | 2,02 | 2,28 | 2,36 | 2,39 | 2,41 | 2,42 | 2,43 | 2,44 | 2,44 | 2,44 | 2,45 | 2,46 | 2,46 | 2,46 | 2,47 | 2,47 | 2,47 | 2,47 | 2,47 |
| 4 | 1,81 | 2,00 | 2,05 | 2,06 | 2,07 | 2,08 | 2,08 | 2,08 | 2,08 | 2,08 | 2,08 | 2,08 | 2,08 | 2,08 | 2,08 | 2,08 | 2,08 | 2,08 | 2,08 |
| 5 | 1,69 | 1,85 | 1,88 | 1,89 | 1,89 | 1,89 | 1,89 | 1,89 | 1,89 | 1,89 | 1,89 | 1,89 | 1,88 | 1,88 | 1,88 | 1,88 | 1,87 | 1,87 | 1,87 |
| 6 | 1,62 | 1,76 | 1,78 | 1,79 | 1,79 | 1,78 | 1,78 | 1,78 | 1,77 | 1,77 | 1,77 | 1,76 | 1,76 | 1,75 | 1,75 | 1,75 | 1,74 | 1,74 | 1,74 |
| 7 | 1,57 | 1,70 | 1,72 | 1,72 | 1,71 | 1,71 | 1,70 | 1,70 | 1,69 | 1,69 | 1,68 | 1,68 | 1,67 | 1,67 | 1,66 | 1,66 | 1,65 | 1,65 | 1,65 |
| 8 | 1,54 | 1,66 | 1,67 | 1,66 | 1,66 | 1,65 | 1,64 | 1,64 | 1,63 | 1,63 | 1,62 | 1,62 | 1,61 | 1,60 | 1,60 | 1,59 | 1,59 | 1,58 | 1,58 |
| 9 | 1,51 | 1,62 | 1,63 | 1,63 | 1,62 | 1,61 | 1,60 | 1,60 | 1,59 | 1,59 | 1,58 | 1,57 | 1,56 | 1,56 | 1,55 | 1,54 | 1,54 | 1,53 | 1,53 |
| 10 | 1,49 | 1,60 | 1,60 | 1,59 | 1,59 | 1,58 | 1,57 | 1,56 | 1,56 | 1,55 | 1,54 | 1,53 | 1,52 | 1,52 | 1,51 | 1,51 | 1,50 | 1,49 | 1,48 |
| 11 | 1,47 | 1,58 | 1,58 | 1,57 | 1,56 | 1,55 | 1,54 | 1,53 | 1,53 | 1,52 | 1,51 | 1,50 | 1,49 | 1,49 | 1,48 | 1,47 | 1,47 | 1,46 | 1,45 |
| 12 | 1,46 | 1,56 | 1,56 | 1,55 | 1,54 | 1,53 | 1,52 | 1,51 | 1,51 | 1,50 | 1,49 | 1,48 | 1,47 | 1,46 | 1,45 | 1,45 | 1,44 | 1,43 | 1,42 |
| 13 | 1,45 | 1,55 | 1,55 | 1,53 | 1,52 | 1,51 | 1,50 | 1,49 | 1,49 | 1,48 | 1,47 | 1,46 | 1,45 | 1,44 | 1,43 | 1,42 | 1,42 | 1,41 | 1,40 |
| 14 | 1,44 | 1,53 | 1,53 | 1,52 | 1,51 | 1,50 | 1,49 | 1,48 | 1,47 | 1,46 | 1,45 | 1,44 | 1,43 | 1,42 | 1,41 | 1,41 | 1,40 | 1,39 | 1,38 |

$\mathbb{P}\left(F_{m,n} \geq a\right) = 0.25$



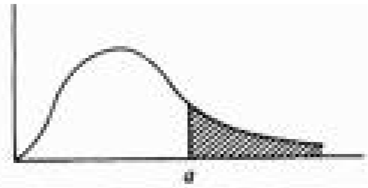

| Grados de libertad del denominador | Grados de libertad del numerador | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| 15 | 1,43 | 1,52 | 1,52 | 1,51 | 1,49 | 1,48 | 1,47 | 1,46 | 1,46 | 1,45 | 1,44 | 1,43 | 1,41 | 1,41 | 1,40 | 1,39 | 1,38 | 1,37 | 1,36 |
| 16 | 1,42 | 1,51 | 1,51 | 1,50 | 1,48 | 1,47 | 1,46 | 1,45 | 1,44 | 1,44 | 1,43 | 1,41 | 1,40 | 1,39 | 1,38 | 1,37 | 1,36 | 1,35 | 1,34 |
| 17 | 1,42 | 1,51 | 1,50 | 1,49 | 1,47 | 1,46 | 1,45 | 1,44 | 1,43 | 1,43 | 1,41 | 1,40 | 1,39 | 1,38 | 1,37 | 1,36 | 1,35 | 1,34 | 1,33 |
| 18 | 1,41 | 1,50 | 1,49 | 1,48 | 1,46 | 1,45 | 1,44 | 1,43 | 1,42 | 1,42 | 1,40 | 1,39 | 1,38 | 1,37 | 1,36 | 1,35 | 1,34 | 1,33 | 1,32 |
| 19 | 1,41 | 1,49 | 1,49 | 1,47 | 1,46 | 1,44 | 1,43 | 1,42 | 1,41 | 1,41 | 1,40 | 1,38 | 1,37 | 1,36 | 1,35 | 1,34 | 1,33 | 1,32 | 1,30 |
| 20 | 1,40 | 1,49 | 1,48 | 1,47 | 1,45 | 1,44 | 1,43 | 1,42 | 1,41 | 1,40 | 1,39 | 1,37 | 1,36 | 1,35 | 1,34 | 1,33 | 1,32 | 1,31 | 1,29 |
| 21 | 1,40 | 1,48 | 1,48 | 1,46 | 1,44 | 1,43 | 1,42 | 1,41 | 1,40 | 1,39 | 1,38 | 1,37 | 1,35 | 1,34 | 1,33 | 1,32 | 1,31 | 1,30 | 1,28 |
| 22 | 1,40 | 1,48 | 1,47 | 1,45 | 1,44 | 1,42 | 1,41 | 1,40 | 1,39 | 1,39 | 1,37 | 1,36 | 1,34 | 1,33 | 1,32 | 1,31 | 1,30 | 1,29 | 1,28 |
| 23 | 1,39 | 1,47 | 1,47 | 1,45 | 1,43 | 1,42 | 1,41 | 1,40 | 1,39 | 1,38 | 1,37 | 1,35 | 1,34 | 1,33 | 1,32 | 1,31 | 1,30 | 1,28 | 1,27 |
| 24 | 1,39 | 1,47 | 1,46 | 1,44 | 1,43 | 1,41 | 1,40 | 1,39 | 1,38 | 1,38 | 1,36 | 1,35 | 1,33 | 1,32 | 1,31 | 1,30 | 1,29 | 1,28 | 1,26 |
| 25 | 1,39 | 1,47 | 1,46 | 1,44 | 1,42 | 1,41 | 1,40 | 1,39 | 1,38 | 1,37 | 1,36 | 1,34 | 1,33 | 1,32 | 1,31 | 1,29 | 1,28 | 1,27 | 1,25 |
| 26 | 1,38 | 1,46 | 1,45 | 1,44 | 1,42 | 1,41 | 1,39 | 1,38 | 1,37 | 1,37 | 1,35 | 1,34 | 1,32 | 1,31 | 1,30 | 1,29 | 1,28 | 1,26 | 1,25 |
| 27 | 1,38 | 1,46 | 1,45 | 1,43 | 1,42 | 1,40 | 1,39 | 1,38 | 1,37 | 1,36 | 1,35 | 1,33 | 1,32 | 1,31 | 1,30 | 1,28 | 1,27 | 1,26 | 1,24 |
| 28 | 1,38 | 1,46 | 1,45 | 1,43 | 1,41 | 1,40 | 1,39 | 1,38 | 1,37 | 1,36 | 1,34 | 1,33 | 1,31 | 1,30 | 1,29 | 1,28 | 1,27 | 1,25 | 1,24 |
| 29 | 1,38 | 1,45 | 1,45 | 1,43 | 1,41 | 1,40 | 1,38 | 1,37 | 1,36 | 1,35 | 1,34 | 1,32 | 1,31 | 1,30 | 1,29 | 1,27 | 1,26 | 1,25 | 1,23 |
| 30 | 1,38 | 1,45 | 1,44 | 1,42 | 1,41 | 1,39 | 1,38 | 1,37 | 1,36 | 1,35 | 1,34 | 1,32 | 1,30 | 1,29 | 1,28 | 1,27 | 1,26 | 1,24 | 1,23 |
| 40 | 1,36 | 1,44 | 1,42 | 1,40 | 1,39 | 1,37 | 1,36 | 1,35 | 1,34 | 1,33 | 1,31 | 1,30 | 1,28 | 1,26 | 1,25 | 1,24 | 1,22 | 1,21 | 1,19 |
| 60 | 1,35 | 1,42 | 1,41 | 1,38 | 1,37 | 1,35 | 1,33 | 1,32 | 1,31 | 1,30 | 1,29 | 1,27 | 1,25 | 1,24 | 1,22 | 1,21 | 1,19 | 1,17 | 1,15 |
| 120 | 1,34 | 1,40 | 1,39 | 1,37 | 1,35 | 1,33 | 1,31 | 1,30 | 1,29 | 1,28 | 1,26 | 1,24 | 1,22 | 1,21 | 1,19 | 1,18 | 1,16 | 1,13 | 1,10 |
| ∞ | 1,32 | 1,39 | 1,37 | 1,35 | 1,33 | 1,31 | 1,29 | 1,28 | 1,27 | 1,25 | 1,24 | 1,22 | 1,19 | 1,18 | 1,16 | 1,14 | 1,12 | 1,08 | 1,00 |

$\mathbb{P}\left(F_{m,n} \geq a\right) = 0.1$



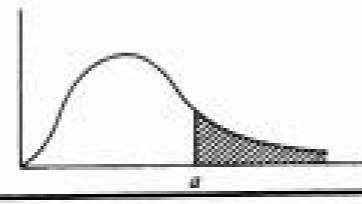

| Grados de libertad del denominador | Grados de libertad del numerador | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| 1 | 39,86 | 49,50 | 53,59 | 55,83 | 57,24 | 58,20 | 58,91 | 59,44 | 59,86 | 60,19 | 60,71 | 61,22 | 61,74 | 62,00 | 62,26 | 62,53 | 62,79 | 63,06 | 63,33 |
| 2 | 8,53 | 9,00 | 9,16 | 9,24 | 9,29 | 9,33 | 9,35 | 9,37 | 9,38 | 9,39 | 9,41 | 9,42 | 9,44 | 9,45 | 9,46 | 9,47 | 9,47 | 9,48 | 9,49 |
| 3 | 5,54 | 5,46 | 5,39 | 5,34 | 5,31 | 5,28 | 5,27 | 5,25 | 5,24 | 5,23 | 5,22 | 5,20 | 5,18 | 5,17 | 5,17 | 5,16 | 5,15 | 5,14 | 5,13 |
| 4 | 4,54 | 4,32 | 4,19 | 4,11 | 4,05 | 4,01 | 3,98 | 3,95 | 3,94 | 3,92 | 3,90 | 3,87 | 3,84 | 3,83 | 3,82 | 3,80 | 3,79 | 3,78 | 3,76 |
| 5 | 4,06 | 3,78 | 3,62 | 3,52 | 3,45 | 3,40 | 3,37 | 3,34 | 3,32 | 3,30 | 3,27 | 3,24 | 3,21 | 3,19 | 3,17 | 3,16 | 3,14 | 3,12 | 3,10 |
| 6 | 3,78 | 3,46 | 3,29 | 3,18 | 3,11 | 3,05 | 3,01 | 2,98 | 2,96 | 2,94 | 2,90 | 2,87 | 2,84 | 2,82 | 2,80 | 2,78 | 2,76 | 2,74 | 2,72 |
| 7 | 3,59 | 3,26 | 3,07 | 2,96 | 2,88 | 2,83 | 2,78 | 2,75 | 2,72 | 2,70 | 2,67 | 2,63 | 2,59 | 2,58 | 2,56 | 2,54 | 2,51 | 2,49 | 2,47 |
| 8 | 3,46 | 3,11 | 2,92 | 2,81 | 2,73 | 2,67 | 2,62 | 2,59 | 2,56 | 2,54 | 2,50 | 2,46 | 2,42 | 2,40 | 2,38 | 2,36 | 2,34 | 2,32 | 2,29 |
| 9 | 3,36 | 3,01 | 2,81 | 2,69 | 2,61 | 2,55 | 2,51 | 2,47 | 2,44 | 2,42 | 2,38 | 2,34 | 2,30 | 2,28 | 2,25 | 2,23 | 2,21 | 2,18 | 2,16 |
| 10 | 3,29 | 2,92 | 2,73 | 2,61 | 2,52 | 2,46 | 2,41 | 2,38 | 2,35 | 2,32 | 2,28 | 2,24 | 2,20 | 2,18 | 2,16 | 2,13 | 2,11 | 2,08 | 2,06 |
| 11 | 3,23 | 2,86 | 2,66 | 2,54 | 2,45 | 2,39 | 2,34 | 2,30 | 2,27 | 2,25 | 2,21 | 2,17 | 2,12 | 2,10 | 2,08 | 2,05 | 2,03 | 2,00 | 1,97 |
| 12 | 3,18 | 2,81 | 2,61 | 2,48 | 2,39 | 2,33 | 2,28 | 2,24 | 2,21 | 2,19 | 2,15 | 2,10 | 2,06 | 2,04 | 2,01 | 1,99 | 1,96 | 1,93 | 1,90 |
| 13 | 3,14 | 2,76 | 2,56 | 2,43 | 2,35 | 2,28 | 2,23 | 2,20 | 2,16 | 2,14 | 2,10 | 2,05 | 2,01 | 1,98 | 1,96 | 1,93 | 1,90 | 1,88 | 1,85 |
| 14 | 3,10 | 2,73 | 2,52 | 2,39 | 2,31 | 2,24 | 2,19 | 2,15 | 2,12 | 2,10 | 2,05 | 2,01 | 1,96 | 1,94 | 1,91 | 1,89 | 1,86 | 1,83 | 1,80 |

$\mathbb{P}\left(F_{m,n} \geq a\right) = 0.1$



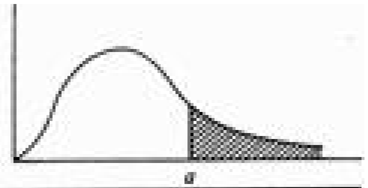

| Grados de libertad del denominador | Grados de libertad del numerador | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| 15 | 3,07 | 2,70 | 2,49 | 2,36 | 2,27 | 2,21 | 2,16 | 2,12 | 2,09 | 2,06 | 2,02 | 1,97 | 1,92 | 1,90 | 1,87 | 1,85 | 1,82 | 1,79 | 1,76 |
| 16 | 3,05 | 2,67 | 2,46 | 2,33 | 2,24 | 2,18 | 2,13 | 2,09 | 2,06 | 2,03 | 1,99 | 1,94 | 1,89 | 1,87 | 1,84 | 1,81 | 1,78 | 1,75 | 1,72 |
| 17 | 3,03 | 2,64 | 2,44 | 2,31 | 2,22 | 2,15 | 2,10 | 2,06 | 2,03 | 2,00 | 1,96 | 1,91 | 1,86 | 1,84 | 1,81 | 1,78 | 1,75 | 1,72 | 1,69 |
| 18 | 3,01 | 2,62 | 2,42 | 2,29 | 2,20 | 2,13 | 2,08 | 2,04 | 2,00 | 1,98 | 1,93 | 1,89 | 1,84 | 1,81 | 1,78 | 1,75 | 1,72 | 1,69 | 1,66 |
| 19 | 2,99 | 2,61 | 2,40 | 2,27 | 2,18 | 2,11 | 2,06 | 2,02 | 1,98 | 1,96 | 1,91 | 1,86 | 1,81 | 1,79 | 1,76 | 1,73 | 1,70 | 1,67 | 1,63 |
| 20 | 2,97 | 2,59 | 2,38 | 2,25 | 2,16 | 2,09 | 2,04 | 2,00 | 1,96 | 1,94 | 1,89 | 1,84 | 1,79 | 1,77 | 1,74 | 1,71 | 1,68 | 1,64 | 1,61 |
| 21 | 2,96 | 2,57 | 2,36 | 2,23 | 2,14 | 2,08 | 2,02 | 1,98 | 1,95 | 1,92 | 1,87 | 1,83 | 1,78 | 1,75 | 1,72 | 1,69 | 1,66 | 1,62 | 1,59 |
| 22 | 2,95 | 2,56 | 2,35 | 2,22 | 2,13 | 2,06 | 2,01 | 1,97 | 1,93 | 1,90 | 1,86 | 1,81 | 1,76 | 1,73 | 1,70 | 1,67 | 1,64 | 1,60 | 1,57 |
| 23 | 2,94 | 2,55 | 2,34 | 2,21 | 2,11 | 2,05 | 1,99 | 1,95 | 1,92 | 1,89 | 1,84 | 1,80 | 1,74 | 1,72 | 1,69 | 1,66 | 1,62 | 1,59 | 1,55 |
| 24 | 2,93 | 2,54 | 2,33 | 2,19 | 2,10 | 2,04 | 1,98 | 1,94 | 1,91 | 1,88 | 1,83 | 1,78 | 1,73 | 1,70 | 1,67 | 1,64 | 1,61 | 1,57 | 1,53 |
| 25 | 2,92 | 2,53 | 2,32 | 2,18 | 2,09 | 2,02 | 1,97 | 1,93 | 1,89 | 1,87 | 1,82 | 1,77 | 1,72 | 1,69 | 1,66 | 1,63 | 1,59 | 1,56 | 1,52 |
| 26 | 2,91 | 2,52 | 2,31 | 2,17 | 2,08 | 2,01 | 1,96 | 1,92 | 1,88 | 1,86 | 1,81 | 1,76 | 1,71 | 1,68 | 1,65 | 1,61 | 1,58 | 1,54 | 1,50 |
| 27 | 2,90 | 2,51 | 2,30 | 2,17 | 2,07 | 2,00 | 1,95 | 1,91 | 1,87 | 1,85 | 1,80 | 1,75 | 1,70 | 1,67 | 1,64 | 1,60 | 1,57 | 1,53 | 1,49 |
| 28 | 2,89 | 2,50 | 2,29 | 2,16 | 2,06 | 2,00 | 1,94 | 1,90 | 1,87 | 1,84 | 1,79 | 1,74 | 1,69 | 1,66 | 1,63 | 1,59 | 1,56 | 1,52 | 1,48 |
| 29 | 2,89 | 2,50 | 2,28 | 2,15 | 2,06 | 1,99 | 1,93 | 1,89 | 1,86 | 1,83 | 1,78 | 1,73 | 1,68 | 1,65 | 1,62 | 1,58 | 1,55 | 1,51 | 1,47 |
| 30 | 2,88 | 2,49 | 2,28 | 2,14 | 2,05 | 1,98 | 1,93 | 1,88 | 1,85 | 1,82 | 1,77 | 1,72 | 1,67 | 1,64 | 1,61 | 1,57 | 1,54 | 1,50 | 1,46 |
| 40 | 2,84 | 2,44 | 2,23 | 2,09 | 2,00 | 1,93 | 1,87 | 1,83 | 1,79 | 1,76 | 1,71 | 1,66 | 1,61 | 1,57 | 1,54 | 1,51 | 1,47 | 1,42 | 1,38 |
| 60 | 2,79 | 2,39 | 2,18 | 2,04 | 1,95 | 1,87 | 1,82 | 1,77 | 1,74 | 1,71 | 1,66 | 1,60 | 1,54 | 1,51 | 1,48 | 1,44 | 1,40 | 1,35 | 1,29 |
| 120 | 2,75 | 2,35 | 2,13 | 1,99 | 1,90 | 1,82 | 1,77 | 1,72 | 1,68 | 1,65 | 1,60 | 1,55 | 1,48 | 1,45 | 1,41 | 1,37 | 1,32 | 1,26 | 1,19 |
| ∞ | 2,71 | 2,30 | 2,08 | 1,94 | 1,85 | 1,77 | 1,72 | 1,67 | 1,63 | 1,60 | 1,55 | 1,49 | 1,42 | 1,38 | 1,34 | 1,30 | 1,24 | 1,17 | 1,00 |

$\mathbb{P}\left(F_{m,n} \geq a\right) = 0.1$



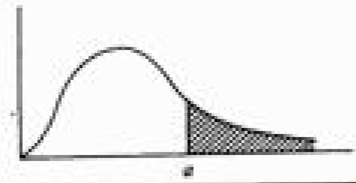

| Grados de libertad del denominador | Grados de libertad del numerador | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| 1 | 161,40 | 199,50 | 215,70 | 224,60 | 230,20 | 234,00 | 236,80 | 238,90 | 240,50 | 241,90 | 243,90 | 245,90 | 248,00 | 249,10 | 250,10 | 251,10 | 252,20 | 253,30 | 254,30 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,35 | 19,37 | 19,38 | 19,40 | 19,41 | 19,43 | 19,45 | 19,45 | 19,46 | 19,47 | 19,48 | 19,49 | 19,50 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,89 | 8,85 | 8,81 | 8,79 | 8,74 | 8,70 | 8,66 | 8,64 | 8,62 | 8,59 | 8,57 | 8,55 | 8,53 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,09 | 6,04 | 6,00 | 5,96 | 5,91 | 5,86 | 5,80 | 5,77 | 5,75 | 5,72 | 5,69 | 5,66 | 5,63 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,88 | 4,82 | 4,77 | 4,74 | 4,68 | 4,62 | 4,56 | 4,53 | 4,50 | 4,46 | 4,43 | 4,40 | 4,36 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,21 | 4,15 | 4,10 | 4,06 | 4,00 | 3,94 | 3,87 | 3,84 | 3,81 | 3,77 | 3,74 | 3,70 | 3,67 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,79 | 3,73 | 3,68 | 3,64 | 3,57 | 3,51 | 3,44 | 3,41 | 3,38 | 3,34 | 3,30 | 3,27 | 3,23 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,50 | 3,44 | 3,39 | 3,35 | 3,28 | 3,22 | 3,15 | 3,12 | 3,08 | 3,04 | 3,01 | 2,97 | 2,93 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,29 | 3,23 | 3,18 | 3,14 | 3,07 | 3,01 | 2,94 | 2,90 | 2,86 | 2,83 | 2,79 | 2,75 | 2,71 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,14 | 3,07 | 3,02 | 2,98 | 2,91 | 2,85 | 2,77 | 2,74 | 2,70 | 2,66 | 2,62 | 2,58 | 2,54 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 3,01 | 2,95 | 2,90 | 2,85 | 2,79 | 2,72 | 2,65 | 2,61 | 2,57 | 2,53 | 2,49 | 2,45 | 2,40 |
| 12 | 4,75 | 3,89 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,91 | 2,85 | 2,80 | 2,75 | 2,69 | 2,62 | 2,54 | 2,51 | 2,47 | 2,43 | 2,38 | 2,34 | 2,30 |
| 13 | 4,67 | 3,81 | 3,41 | 3,18 | 3,03 | 2,92 | 2,83 | 2,77 | 2,71 | 2,67 | 2,60 | 2,53 | 2,46 | 2,42 | 2,38 | 2,34 | 2,30 | 2,25 | 2,21 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,76 | 2,70 | 2,65 | 2,60 | 2,53 | 2,46 | 2,39 | 2,35 | 2,31 | 2,27 | 2,22 | 2,18 | 2,13 |

$\mathbb{P}\left(F_{m,n} \geq a\right) = 0.1$



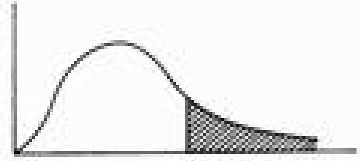

| Grados de libertad del denominador | Grados de libertad del numerador | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,71 | 2,64 | 2,59 | 2,54 | 2,48 | 2,40 | 2,33 | 2,29 | 2,25 | 2,20 | 2,16 | 2,11 | 2,07 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,66 | 2,59 | 2,54 | 2,49 | 2,42 | 2,35 | 2,28 | 2,24 | 2,19 | 2,15 | 2,11 | 2,06 | 2,01 |
| 17 | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,61 | 2,55 | 2,49 | 2,45 | 2,38 | 2,31 | 2,23 | 2,19 | 2,15 | 2,10 | 2,06 | 2,01 | 1,96 |
| 18 | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,58 | 2,51 | 2,46 | 2,41 | 2,34 | 2,27 | 2,19 | 2,15 | 2,11 | 2,06 | 2,02 | 1,97 | 1,92 |
| 19 | 4,38 | 3,52 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,63 | 2,54 | 2,48 | 2,42 | 2,38 | 2,31 | 2,23 | 2,16 | 2,11 | 2,07 | 2,03 | 1,98 | 1,93 | 1,88 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,51 | 2,45 | 2,39 | 2,35 | 2,28 | 2,20 | 2,12 | 2,08 | 2,04 | 1,99 | 1,95 | 1,90 | 1,84 |
| 21 | 4,32 | 3,47 | 3,07 | 2,84 | 2,68 | 2,57 | 2,49 | 2,42 | 2,37 | 2,32 | 2,25 | 2,18 | 2,10 | 2,05 | 2,01 | 1,96 | 1,92 | 1,87 | 1,81 |
| 22 | 4,30 | 3,44 | 3,05 | 2,82 | 2,66 | 2,55 | 2,46 | 2,40 | 2,34 | 2,30 | 2,23 | 2,15 | 2,07 | 2,03 | 1,98 | 1,94 | 1,89 | 1,84 | 1,78 |
| 23 | 4,28 | 3,42 | 3,03 | 2,80 | 2,64 | 2,53 | 2,44 | 2,37 | 2,32 | 2,27 | 2,20 | 2,13 | 2,05 | 2,01 | 1,96 | 1,91 | 1,86 | 1,81 | 1,76 |
| 24 | 4,26 | 3,40 | 3,01 | 2,78 | 2,62 | 2,51 | 2,42 | 2,36 | 2,30 | 2,25 | 2,18 | 2,11 | 2,03 | 1,98 | 1,94 | 1,89 | 1,84 | 1,79 | 1,73 |
| 25 | 4,24 | 3,39 | 2,99 | 2,76 | 2,60 | 2,49 | 2,40 | 2,34 | 2,28 | 2,24 | 2,16 | 2,09 | 2,01 | 1,96 | 1,92 | 1,87 | 1,82 | 1,77 | 1,71 |
| 26 | 4,23 | 3,37 | 2,98 | 2,74 | 2,59 | 2,47 | 2,39 | 2,32 | 2,27 | 2,22 | 2,15 | 2,07 | 1,99 | 1,95 | 1,90 | 1,85 | 1,80 | 1,75 | 1,69 |
| 27 | 4,21 | 3,35 | 2,96 | 2,73 | 2,57 | 2,46 | 2,37 | 2,31 | 2,25 | 2,20 | 2,13 | 2,06 | 1,97 | 1,93 | 1,88 | 1,84 | 1,79 | 1,73 | 1,67 |
| 28 | 4,20 | 3,34 | 2,95 | 2,71 | 2,56 | 2,45 | 2,36 | 2,29 | 2,24 | 2,19 | 2,12 | 2,04 | 1,96 | 1,91 | 1,87 | 1,82 | 1,77 | 1,71 | 1,65 |
| 29 | 4,18 | 3,33 | 2,93 | 2,70 | 2,55 | 2,43 | 2,35 | 2,28 | 2,22 | 2,18 | 2,10 | 2,03 | 1,94 | 1,90 | 1,85 | 1,81 | 1,75 | 1,70 | 1,64 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,33 | 2,27 | 2,21 | 2,16 | 2,09 | 2,01 | 1,93 | 1,89 | 1,84 | 1,79 | 1,74 | 1,68 | 1,62 |
| 40 | 4,08 | 3,23 | 2,84 | 2,61 | 2,45 | 2,34 | 2,25 | 2,18 | 2,12 | 2,08 | 2,00 | 1,92 | 1,84 | 1,79 | 1,74 | 1,69 | 1,64 | 1,58 | 1,51 |
| 60 | 4,00 | 3,15 | 2,76 | 2,53 | 2,37 | 2,25 | 2,17 | 2,10 | 2,04 | 1,99 | 1,92 | 1,84 | 1,75 | 1,70 | 1,65 | 1,59 | 1,53 | 1,47 | 1,39 |
| 120 | 3,92 | 3,07 | 2,68 | 2,45 | 2,29 | 2,17 | 2,09 | 2,02 | 1,96 | 1,91 | 1,83 | 1,75 | 1,66 | 1,61 | 1,55 | 1,50 | 1,43 | 1,35 | 1,25 |
| ∞ | 3,84 | 3,00 | 2,60 | 2,37 | 2,21 | 2,10 | 2,01 | 1,94 | 1,88 | 1,83 | 1,75 | 1,67 | 1,57 | 1,52 | 1,46 | 1,39 | 1,32 | 1,22 | 1,00 |

$\mathbb{P}\left(F_{m,n} \geq a\right) = \mathbf{0.025}$




| Grados de libertad del denominador | Grados de libertad del numerador | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| 1 | 647,80 | 799,50 | 864,20 | 899,60 | 921,80 | 937,10 | 948,20 | 956,70 | 963,30 | 968,60 | 976,70 | 984,90 | 993,10 | 997,20 | 1001,00 | 1006,00 | 1010,00 | 1014,00 | 1018,00 |
| 2 | 38,51 | 39,00 | 39,17 | 39,25 | 39,30 | 39,33 | 39,36 | 39,37 | 39,39 | 39,40 | 39,41 | 39,43 | 39,45 | 39,46 | 39,46 | 39,47 | 39,48 | 39,49 | 39,50 |
| 3 | 17,44 | 16,04 | 15,44 | 15,10 | 14,88 | 14,73 | 14,62 | 14,54 | 14,47 | 14,42 | 14,34 | 14,25 | 14,17 | 14,12 | 14,08 | 14,04 | 13,99 | 13,95 | 13,90 |
| 4 | 12,22 | 10,65 | 9,98 | 9,60 | 9,36 | 9,20 | 9,07 | 8,98 | 8,90 | 8,84 | 8,75 | 8,66 | 8,56 | 8,51 | 8,46 | 8,41 | 8,36 | 8,31 | 8,26 |
| 5 | 10,01 | 8,43 | 7,76 | 7,39 | 7,15 | 6,98 | 6,85 | 6,76 | 6,68 | 6,62 | 6,52 | 6,43 | 6,33 | 6,28 | 6,23 | 6,18 | 6,12 | 6,07 | 6,02 |
| 6 | 8,81 | 7,26 | 6,60 | 6,23 | 5,99 | 5,82 | 5,70 | 5,60 | 5,52 | 5,46 | 5,37 | 5,27 | 5,17 | 5,12 | 5,07 | 5,01 | 4,96 | 4,90 | 4,85 |
| 7 | 8,07 | 6,54 | 5,89 | 5,52 | 5,29 | 5,12 | 4,99 | 4,90 | 4,82 | 4,76 | 4,67 | 4,57 | 4,47 | 4,42 | 4,36 | 4,31 | 4,25 | 4,20 | 4,14 |
| 8 | 7,57 | 6,06 | 5,42 | 5,05 | 4,82 | 4,65 | 4,53 | 4,43 | 4,36 | 4,30 | 4,20 | 4,10 | 4,00 | 3,95 | 3,89 | 3,84 | 3,78 | 3,73 | 3,67 |
| 9 | 7,21 | 5,71 | 5,08 | 4,72 | 4,48 | 4,32 | 4,20 | 4,10 | 4,03 | 3,96 | 3,87 | 3,77 | 3,67 | 3,61 | 3,56 | 3,51 | 3,45 | 3,39 | 3,33 |
| 10 | 6,94 | 5,46 | 4,83 | 4,47 | 4,24 | 4,07 | 3,95 | 3,85 | 3,78 | 3,72 | 3,62 | 3,52 | 3,42 | 3,37 | 3,31 | 3,26 | 3,20 | 3,14 | 3,08 |
| 11 | 6,72 | 5,26 | 4,63 | 4,28 | 4,04 | 3,88 | 3,76 | 3,66 | 3,59 | 3,53 | 3,43 | 3,33 | 3,23 | 3,17 | 3,12 | 3,06 | 3,00 | 2,94 | 2,88 |
| 12 | 6,55 | 5,10 | 4,47 | 4,12 | 3,89 | 3,73 | 3,61 | 3,51 | 3,44 | 3,37 | 3,28 | 3,18 | 3,07 | 3,02 | 2,96 | 2,91 | 2,85 | 2,79 | 2,72 |
| 13 | 6,41 | 4,97 | 4,35 | 4,00 | 3,77 | 3,60 | 3,48 | 3,39 | 3,31 | 3,25 | 3,15 | 3,05 | 2,95 | 2,89 | 2,84 | 2,78 | 2,72 | 2,66 | 2,60 |
| 14 | 6,30 | 4,86 | 4,24 | 3,89 | 3,66 | 3,50 | 3,38 | 3,29 | 3,21 | 3,15 | 3,05 | 2,95 | 2,84 | 2,79 | 2,73 | 2,67 | 2,61 | 2,55 | 2,49 |

$\mathbb{P}\left(F_{m,n} \geq a\right) = 0.025$




| Grados de libertad del denominador | Grados de libertad del numerador | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
| 15 | 6,20 | 4,77 | 4,15 | 3,80 | 3,58 | 3,41 | 3,29 | 3,20 | 3,12 | 3,06 | 2,96 | 2,86 | 2,76 | 2,70 | 2,64 | 2,59 | 2,52 | 2,46 | 2,40 |
| 16 | 6,12 | 4,69 | 4,08 | 3,73 | 3,50 | 3,34 | 3,22 | 3,12 | 3,05 | 2,99 | 2,89 | 2,79 | 2,68 | 2,63 | 2,57 | 2,51 | 2,45 | 2,38 | 2,32 |
| 17 | 6,04 | 4,62 | 4,01 | 3,66 | 3,44 | 3,28 | 3,16 | 3,06 | 2,98 | 2,92 | 2,82 | 2,72 | 2,62 | 2,56 | 2,50 | 2,44 | 2,38 | 2,32 | 2,25 |
| 18 | 5,98 | 4,56 | 3,95 | 3,61 | 3,38 | 3,22 | 3,10 | 3,01 | 2,93 | 2,87 | 2,77 | 2,67 | 2,56 | 2,50 | 2,44 | 2,38 | 2,32 | 2,26 | 2,19 |
| 19 | 5,92 | 4,51 | 3,90 | 3,56 | 3,33 | 3,17 | 3,05 | 2,96 | 2,88 | 2,82 | 2,72 | 2,62 | 2,51 | 2,45 | 2,39 | 2,33 | 2,27 | 2,20 | 2,13 |
| 20 | 5,87 | 4,46 | 3,86 | 3,51 | 3,29 | 3,13 | 3,01 | 2,91 | 2,84 | 2,77 | 2,68 | 2,57 | 2,46 | 2,41 | 2,35 | 2,29 | 2,22 | 2,16 | 2,09 |
| 21 | 5,83 | 4,42 | 3,82 | 3,48 | 3,25 | 3,09 | 2,97 | 2,87 | 2,80 | 2,73 | 2,64 | 2,53 | 2,42 | 2,37 | 2,31 | 2,25 | 2,18 | 2,11 | 2,04 |
| 22 | 5,79 | 4,38 | 3,78 | 3,44 | 3,22 | 3,05 | 2,93 | 2,84 | 2,76 | 2,70 | 2,60 | 2,50 | 2,39 | 2,33 | 2,27 | 2,21 | 2,14 | 2,08 | 2,00 |
| 23 | 5,75 | 4,35 | 3,75 | 3,41 | 3,18 | 3,02 | 2,90 | 2,81 | 2,73 | 2,67 | 2,57 | 2,47 | 2,36 | 2,30 | 2,24 | 2,18 | 2,11 | 2,04 | 1,97 |
| 24 | 5,72 | 4,32 | 3,72 | 3,38 | 3,15 | 2,99 | 2,87 | 2,78 | 2,70 | 2,64 | 2,54 | 2,44 | 2,33 | 2,27 | 2,21 | 2,15 | 2,08 | 2,01 | 1,94 |
| 25 | 5,69 | 4,29 | 3,69 | 3,35 | 3,13 | 2,97 | 2,85 | 2,75 | 2,68 | 2,61 | 2,51 | 2,41 | 2,30 | 2,24 | 2,18 | 2,12 | 2,05 | 1,98 | 1,91 |
| 26 | 5,66 | 4,27 | 3,67 | 3,33 | 3,10 | 2,94 | 2,82 | 2,73 | 2,65 | 2,59 | 2,49 | 2,39 | 2,28 | 2,22 | 2,16 | 2,09 | 2,03 | 1,95 | 1,88 |
| 27 | 5,63 | 4,24 | 3,65 | 3,31 | 3,08 | 2,92 | 2,80 | 2,71 | 2,63 | 2,57 | 2,47 | 2,36 | 2,25 | 2,19 | 2,13 | 2,07 | 2,00 | 1,93 | 1,85 |
| 28 | 5,61 | 4,22 | 3,63 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,78 | 2,69 | 2,61 | 2,55 | 2,45 | 2,34 | 2,23 | 2,17 | 2,11 | 2,05 | 1,98 | 1,91 | 1,83 |
| 29 | 5,59 | 4,20 | 3,61 | 3,27 | 3,04 | 2,88 | 2,76 | 2,67 | 2,59 | 2,53 | 2,43 | 2,32 | 2,21 | 2,15 | 2,09 | 2,03 | 1,96 | 1,89 | 1,81 |
| 30 | 5,57 | 4,18 | 3,59 | 3,25 | 3,03 | 2,87 | 2,75 | 2,65 | 2,57 | 2,51 | 2,41 | 2,31 | 2,20 | 2,14 | 2,07 | 2,01 | 1,94 | 1,87 | 1,79 |
| 40 | 5,42 | 4,05 | 3,46 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,62 | 2,53 | 2,45 | 2,39 | 2,29 | 2,18 | 2,07 | 2,01 | 1,94 | 1,88 | 1,80 | 1,72 | 1,64 |
| 60 | 5,29 | 3,93 | 3,34 | 3,01 | 2,79 | 2,63 | 2,51 | 2,41 | 2,33 | 2,27 | 2,17 | 2,06 | 1,94 | 1,88 | 1,82 | 1,74 | 1,67 | 1,58 | 1,48 |
| 120 | 5,15 | 3,80 | 3,23 | 2,89 | 2,67 | 2,52 | 2,39 | 2,30 | 2,22 | 2,16 | 2,05 | 1,94 | 1,82 | 1,76 | 1,69 | 1,61 | 1,53 | 1,43 | 1,31 |
| ∞ | 5,02 | 3,69 | 3,12 | 2,79 | 2,57 | 2,41 | 2,29 | 2,19 | 2,11 | 2,05 | 1,94 | 1,83 | 1,71 | 1,64 | 1,57 | 1,48 | 1,39 | 1,27 | 1,00 |