Índice General

1 Introducción

Todos estamos acostumbrados a utilizar con frecuencia expresiones tales como: probablemente el campeon de la UEFA sea el Barca, los momios están 3 a 1 en el juego de football entre pumas y chivas, las posibilidades de que salga bien de la operación es de un 90%. Se usan en el lenguaje coloquial, aunque informalmente, como medida de que tan incierto es que un evento ocurra o no. La intuición de este concepto es algo que nos acompaña y que podemos aprender a usar dentro de la estadística. Pensando un poco podemos darnos cuenta de que las probabilidades de los eventos son números entre cero y uno; que la probabilidad de que un evento ocurra es uno menos la probabilidad de que si ocurra; si dos eventos se excluyen, la probabilidad de que ocurra alguno de ellos es la suma de sus probabilidades individuales, etc.

Estas propiedades de la probabilidad las enunciaremos y utilizaremos, haciendo énfasis en la medida de lo posible de la intución como guía. En estas notas daremos los elementos mínimos necesarios para entender el lenguaje probabilístico que se usará en los cursos de estadísctica.

1.1 Fenómenos deterministas y aleatorios

Un fenómeno es determinista si al repetir exactamenre las condiciones en que sucedió el fenómeno, entonces el resulatdo es el mismo y no otro. A diferencia de los fenómenos aleatorios en los que los resultados nos son predecibles. La teoría de las probabilidades pretende representar esta impredictibilidad en forma numérica.

Ejemplos de fenómenos aleatorios son: el resultado en la loteria; se lanza una moneda 10 veces y se cuenta el número de águilas que resultan; se fabrican artículos en línea y se cuenta el número de artículos defectuosos; el tiempo que dura un foco de luz; se hace una encuesta para medir el número de personas que trabajan en el sector informal.

La probabilidad interviene en muchos aspectos de la vida diaria a través de los fenómenos aleatorios, como el clima, la bolsa de valores, los diagnósticos de los médicos, el riesgo de ser asaltado o de obtener un premio en la loteria, los temblores, la esperanza de vida.

Lo que nos preguntamos es: ¿Cómo decir cosas no triviales de este tipo de fenómenos en los que no sabemos de antemano el resultado que obtendremos en cada ensayo?

La respuesta es que, bajo ciertas condiciones, se ha observado empíricamente una "tendencia central". Esta tendencia central en la teoria de las probabilidades son los teoremas límite.

1.2 Espacios muestrales y evento

Dado un fenómeno aleatorio denotaremos por Ω al conjunto que incluye a todos los posibles resultados elementales o irreducibles del fenómeno, en el sentido de que cada resultado elemental no puede descomponerse en dos o más resultados ajenos, a Ω se le llama **el espacio muestral**. En el caso de que la cardinalidad del espacio muestral sea numerable, es decir, que el número de elementos del espacio muestral sea menor o igual que el de los números naturales (como en el caso de las poblaciones). Por otro lado, llamaremos **evento** a cualquier subconjunto del espacio muestral y denotaremos a los eventos por las primeras letras del alfabeto en mayúsculas: A, B, C, etc. Con la ayuda de algunos ejemplos ilustraremos a continuación los conceptos de espacio muestral y evento.

Ejemplos :

1) Si un experimento aleatorio consiste en lanzar un dado y observar el número que aparece en la cara superior, entonces claramente el espacio muestral es el conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Como ejemplo de un evento para este experimento podemos definir el conjunto $A = \{2, 4, 6\}$, que corresponde al suceso de obtener como resultado un número par. Si al lanzar el dado una vez se obtiene el número "4", decimos entonces que se observó la ocurrencia del evento A, y si se obtiene por ejemplo el resultado "1", decimos que no se observó la ocurrencia del evento A.

2) Si extraemos al azar una carta de un paquete convencional de cartas, entonces el espacio muestral es elconjunto $\Omega = A \times B$ donde $A = \{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K\}$ y $B = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$. Sea C el evento de obtener una carta color rojo, entonces $C = \{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K\} \times \{\diamondsuit, \heartsuit\}$.

Dado un espacio muestral Ω y dos eventos A y B, decimos que A y B son eventos ajenos si $A \cap B = \emptyset$, es decir si la intersección es vacia. Se acostumbra decir también que los eventos A y B son mutuamente excluyentes. Si sucede uno, seguro no sucede el otro. Si definimos los eventos A el resultado del lanzamiento del dado es un número par, $A = \{2, 4, 6\}$, B el resultado del lanzamiento del dado es un número impar, $B = \{1, 3, 5\}$ y C que el resultado sea un número divisible entre 3, $C = \{3, 6\}$, entonces A y B son ajenos pero A y C no lo son.

2 Definiciones de Probabilidad

2.1 Espacio de probabilidad

Definición 1 *Medida de probabilidad*

*Decimos que P es una **medida de probabilidad, o simplemente probabilidad**, en el espacio muestral Ω, si P es una función definida de la clase de de todos los eventos del espacio muestral a los números reales no negativos (es decir $P : 2^{\Omega} \to [0, \infty)$), tal que*

1) $P(\Omega) = 1$

2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para cualesquiera eventos ajenos A y B.

En la definición más rigurosa se pide que esta última condición se cumpla para una unión numerable de eventos ajenos. Recomendamos al lector que escriba la afirmación en este caso.

Definición 2 *Espacio de probabilidad*

*A la terna $\left(\Omega, 2^{\Omega}, P\right)$, con el espacio muestral Ω de cardinalidad a lo más numerable y P una medida de probabilidad, se le llama **espacio de probabilidad.***

2.2 Espacios finitos equiprobables

Frecuentemente, las características físicas de un experimento sugieren que se asignen iguales probabilidades a los diferentes resultados del espacio muestral. Un espacio muestral finito Ω en el que cada elemento muestral tiene la misma probabilidad, se lamará **espacio equiprobable**. Y se define como $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, donde $|\cdot|$ es la cardinalidad del conjunto y A es cualquier subconjunto de Ω. En otras palabras$P(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$.

Es fácil ver que P así definida satisface las condiciones de la definición de espacio de probabilidad, recomendamos al lector lo verifique para que se acostumbre al manejo de las propiedades de la probabilidad.

Ejemplos :

1) Se lanza un dado perfectamente balanceado, El espacio muestral es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, la cardinalidad es $|\Omega| = 6$. Sea A el evento de obtener como resultado un número par, $A = \{2, 4, 6\}$, entonces $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2) Se selecciona al azar una carta de una baraja, ya vimos que el espacio muestral es $\Omega = \{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K\} \times \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$. Consideremos el evento de obtener una carta perteneciente al palo de diamantes. $B = \{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K\} \times \{\diamondsuit\}$, entonces $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

Proposición 3 *Dado un espacio muestral Ω y una medida de probabilidad P definida en 2^Ω, la probabilidad P satisface:*

1) Para todo $A \in 2^\Omega$ se cumple que $0 \leq P(A) \leq 1$.

2) $P(\emptyset) = 0$, la probabilidad del evento imposible es cero.

3) Si $A \subseteq B \subseteq \Omega$, entonces $P(A) \leq P(B)$.

4) Para todo $A \in 2^\Omega$ se cumple que $P(A^c) = 1 - P(A)$.

5) Si A y B son eventos cualesquiera (ajenos o no), entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

La demostración de esta proposición es directa a partir de la definición de medida de probabilidad.

2.3 Probabilidad condicional e independencia

Una definición de suma importancia en toeria de probabilidad es la de independencia. Por ejemplo, el evento de que mañana llueva y el de que el último número de la loteria sea 5 suena razonable que son independientes.

Se dice que un evento B es independiente de un evento A si la probabilidad de que B suceda no está influenciada porque A haya o no sucedido.

Definición 4 *Independencia de dos eventos*

Diremos de los eventos A y B son independientes si y sólo si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Es decir, que la medida de probabilidad de la intersección coincide con el producto de las medidas de probabilidad.

Definición 5 *Probabilidad condicional*

Dado un evento B talque $P(B) > 0$ se define la probabilidad condicional de A dado B como

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

La idea detrás de esta definición es la de restringir el espacio muestral al conjunto B. Se calcula la probabilidad de que el evento A suceda una vez que el evento B haya sucedido.

Observemos que en el caso de espacios muestrales equiprobables
$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$

En el caso en que A y B son independientes
$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$

Es decir que la probabilidad de la A dado B es simplemente la probabilidad de A. El hecho de que ocurra o no ocurra el evento B no afecta la probabilidad del evento A.

De la fórmula de probabilidad condicional podemos despejar la probabilidad de la intersección de dos eventos y obtenemos una muy útil igualdad
$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$
$\boldsymbol{NOTA:}$
Eventos ajenos y eventos independientes son dos conceptos por completo diferentes. De hecho si dos eventos son excluyentes entre si, no pueden ser independientes. Si sucede uno de ellos, entonces, la probabilidad condicional del otro es cero. Este es un error muy común que hay que evitar.

2.4 Probabilidad total y fórmula de Bayes-Laplace

Supongamos que el espacio muestral Ω esta dividido en dos eventos ajenos A y A^c. Dado un evento B nos preguntamos por la probabilidad del evento B, dado que conocemos las probabilidades condicionales de B dado A y A^c respectivamente. Entonces
$P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap (A \cup A^c))$
$= P((B \cap A) \cup (B \cap A^c))$
$= P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$
$= P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid A^c) \cdot P(A^c)$

Esto nos lleva a la fórmula de probabilidad total
$P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid A^c) \cdot P(A^c)$

Quizá la aplicación más importante e interesante del concepto de probabilidad condicional es la llamada Regla de Bayes. Fue usada de forma explícita por Thomas Bayes, aunque la prueba ya la había establecido de forma implícita Abraham de Moivre. Actualmente se han desarrollado nuevas ideas en campos teóricos y prácticos a partir de la Regla de Bayes, destacando por su utilidad la estadística bayesiana. Aquí intentaremos comprender el sentido de dicha propiedad con algunos ejemplos simples.

Como hemos podido comprobar, empíricamente una probabilidad condicional es útil cuando debemos obtener información cuantitativa a futuro cuando las condiciones presentes son conocidas. Sin embargo, en muchos experimentos es necesario obtener información de situaciones pasadas a partir de condiciones presentes. La Regla de Bayes es una simple fórmula que permite tal cosa, cuya prueba y su propia enunciación carecen de complejidad profunda, siendo quizá el resultado de una observación bastante sencilla del resto de las propiedades ya estudiadas.

Sustituyendo en la definición de probabilidad condicional la fórmula de probabilidad total tenemos que:

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)}$

Éstas fórmulas tienen generalizaciones inmediatas al caso en que el espacio muestral está dividido en n eventos ajenos.

Por ejemplo para el caso de 3 eventos A, B y C tales que su unión es el espacio total Ω y sean ajenos dos a dos,

$P(D) = P(D \mid A) \cdot P(A) + P(D \mid B) \cdot P(B) + P(D \mid C) \cdot P(C)$

$P(A \mid D) = \frac{P(D|A) \cdot P(A)}{P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + P(D|C) \cdot P(C)}$

2.5 Ejercicios

1) Suponga que se tiene un paquete de N focos de luz, el cual contiene M unidades con filamentos rotos.

a) Se prueban uno por uno los focos hasta que se encuentra uno defectuoso. Describir el espacio muestral adecuado para este experimento.

b) Supongase que se prueban uno por uno hasta encontrar todos los defectuosos. Describir el correspondiente espacio muestral para este experimento.

2) Sean A, B y C tres eventos asociados con un experimento aleatorio. Exprese las siguientes afirmaciones en términos del conjuntos

a) Al menos uno de los eventos sucede.

b) Exactamente uno de los eventos sucede.

c) Exactamente dos de los eventos suceden.

d) No ocurren más de dos eventos simultáneamente.

3) Sean A y B dos sucesos asociados con un experimento. Supongase que $P(A) = 0.4$ mientras que $P(A \cup B) = 0.8$ y sea $P(B) = p$.

a) ¿Para qué elección de p son A y B ajenos?

b) ¿Para qué elección de p son A y B independientes?

4) Dos personas lanzan tres monedas regulares cada una ¿Cuál es la probabilidad de que tengan el mismo número de águilas?

5) En una cuidad se publican los periódicos A, B y C. Una encuesta reciente de lectores indica lo siguiente: 20% lee A, 18% lee B, 16% lee C, 4% lee A y B, 4%lee A y C, 2% lee B y C y 2% lee A, B y C. Para un adulto escogido al azar, calcular la probabilidad de que

a) no lee ningun periódico

b) lea exactamente uno de los periódicos

c) las al menos A y B, si se sabe que lee al menos uno de los periódicos publicados.

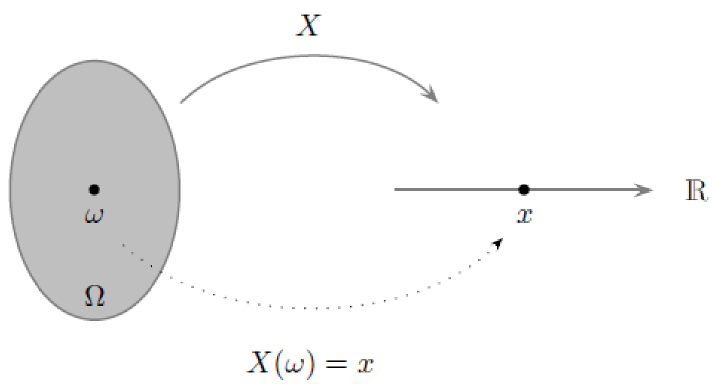
3 Variables aleatorias

Dado un experimento aleatorio cualquiera, una **variable aleatoria** es una transformación X del espacio de resultados Ω al conjunto de números reales, esto es,

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

A menudo se escribe simplemente v.a. en lugar del término variable aleatoria.

Suponga entonces que se efectúa el experimento aleatorio una vez y se obtiene un resultado ω en Ω. Al transformar este resultado con la variable aleatoria X se obtiene un número real $X(\omega) = x$. Podemos entonces suponer que los posibles resultados del experimento aleatorio son los diferentes números reales x que la función X puede tomar. Ilustramos de manera gráfica el concepto de variable aleatoria en la siguiente figura.



Una variable aleatoria es una función X del conjunto Ω en $\mathbb{R}$.

Lo que estamos haciendo con las variables aleatorias es permitirnos trabajar en $\mathbb{R}$, en lugar de estar trabajando en el espacio muestral Ω. Éste puede ser canicas, una población de árboles o personas enfermas.

Debemos hacer aqui varias observaciones. Primeramente seguiremos la notación usual de usar la letra mayúscula X para denotar de manera general una variable aleatoria cualquiera. Es importante observar que X (mayúscula), denota una variable aleatoria, es decir, una función de Ω en $\mathbb{R}$, mientras que x (minúscula), denota un número real. Veamos algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo. Suponga que un experimento aleatorio consiste en lanzar al aire una moneda y observar la cara superior una vez que la moneda cae. Denotemos por "Cara" y "Cruz" los dos lados de la moneda. Entonces claramente el espacio muestral es el conjunto $\Omega = \{\text{“}Cara\text{”}, \text{“}Cruz\text{”}\}$. Defina la variable aleatoria $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue

$X(\text{“}Cara\text{”}) = 0$,

$X(\text{“}Cruz\text{”}) = 1$.

De este modo podemos suponer entonces que el experimento aleatorio tiene dos valores numéricos posibles: 0 y 1. Observe que los números 0 y 1 son en realidad

arbitrarios y bien pueden ser escogidos otro par de números reales.

Ejemplo. Considere nuevamente el experimento aleatorio sencillo de lanzar una moneda. Podemos definir otra variable aleatoria $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente forma

$Y(\text{“}Cara\text{”}) = Y(\text{“}Cruz\text{”}) = 2.$

En este caso la variable Y solo toma un valor, el número 2. Cualquier resultado del experimento aleatorio produce, a través de la función Y , el número 2. Decimos entonces que Y es la variable aleatoria constante 2.

3.1 Variables aleatorias discretas y continuas

Ahora, si consideramos el conjunto de valores que una variable aleatoria puede tomar, podemos clasificar las variables aleatorias en al menos dos tipos: discretas y continuas. Decimos que una v.a. es **discreta** cuando el conjunto de valores que ésta toma es un conjunto discreto, es decir, un conjunto finito o numerable. Por ejemplo, el conjunto $\{0, 1, 2, ..., n\}$ es un conjunto discreto porque es finito, lo mismo N pues aunque es infinito, es numerable y por lo tanto discreto. Por otra parte, decimos que una variable aleatoria es **continua** cuando toma todos los valores dentro de un intervalo $(a, b) \subseteq R$. Estudiaremos únicamente variables aleatorias que son discretas o continuas.

Usaremos la siguiente notación: Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ entonces la expresión $(X \in A)$, incluyendo el paréntesis, denota el conjunto $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$, es decir,

$(X \in A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}.$

En palabras, la expresión $(X \in A)$ denota aquel subconjunto de cuyos elementos son tales que bajo la aplicación de la función X toman un valor numérico contenido en el conjunto A.

Ejemplo. Un experimento aleatorio consiste en escoger a una persona ω al azar. La variable aleatoria X evaluada en ω corresponde a conocer la siguiente característica, o una codificación de esta característica, de la persona escogida. En cada caso se trata de una variable aleatoria discreta: a) Edad en años. b) Número de hijos.c) Peso. d) Estatura. e) Sueldo. f) Nivel escolar. g) Estado civil. h) Lugar de nacimiento.

3.2 Funciones de densidad y de distribución

Existen dos funciones que nos proveen de información acerca de las características de la variable aleatoria. Estas funciones, llamadas **función de densidad** y

función de distribución, nos permiten representar a un mismo tiempo tanto los valores que puede tomar la variable como las probabilidades de los distintos eventos. Definiremos primero la función de densidad para una variable aleatoria discreta, después para una continua, y finalmente definiremos la función de distribución para ambos tipos de variables aleatorias.

Definición 6 *La función de densidad* $f_X(x)$ *de una variable aleatoria discreta* X *es:*

$f_X(x) = P(X = x)$ *para* $x \in X$

observemos que $\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$*, entonces* $f_X(x) = P(X = x) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \in A)$.

Ejemplo: Supongamos que lanzamos 3 monedas perfectamente balanceadas y nos interesa $X :=$ el número de águilas en los tres lanzamientos. El espacio muestral Ω serán todas las posibles combinaciones de resultado de las tres monedas. $\Omega = \{(a, a, a), (a, a, s), (a, s, a), (a, s, s), (s, a, a), (s, a, s), (s, s, a), (s, s, s)\}$.

Entonces la variable aleatoria X tomará los siguientes valores:

$X((a, a, a)) = 3$

$X((a, a, s)) = X((a, s, a)) = X((s, a, a)) = 2$

$X((a, s, s)) = X((s, a, s)) = X((s, s, a)) = 1$

$X((s, s, s)) = 0$

Y la función de densidad será:

$f_X(0) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$

$f_X(1) = P(X = 1) = \frac{3}{8}$

$f_X(2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}$

$f_X(3) = P(X = 3) = \frac{1}{8}$

o, en forma concentrada

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, \text{si } x = 0, 3 \\ \frac{3}{8}, \text{si } x = 1, 2 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

En general la forma de calcular la probabilidad de un evento A es sumar sobre los valores x_i que pertenecen al evento A.

$$P(A) = \sum_{x_i \in A} f_X(x_i)$$

Propiedades de la función de densidad $f_X(x)$ de una variable aleatoria discreta X.

1) La imagen de f_X es a lo mas numerable

2) $f_X \geq 0$

3) $\sum\limits_{x_i} f_X\left(x_i\right) = 1$, donde la suma es sobre todos los valores x_i.

También podemos empezar con una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaga estas tres condiciones y a partir de ahí definir a una variable aleatoria cuya función de densidad sea precisamente f.

Definición 7 *Sea X una variable aleatoria continua. Decimos que la función integrable y no negativa $f_X(x) : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ es la función de densidad de X si para cualquier intervalo (a, b) de $\mathbb{R}$ se cumple la igualdad*

$$P(X \in (a, b)) = \int\limits_a^b f_X(x)dx$$

Es decir, la probabilidad de que la variable tome un valor dentro del intervalo (a, b) se puede calcular o expresar como el área bajo la función de densidad en el

intervalo (a, b). De esta forma el cálculo de una probabilidad se reduce al cálculo de una integral.

Toda funcin de densidad $f_X(x)$ de una variable aleatoria continua cumple las siguientes propiedades análogas al caso discreto.

1) $f_X \geq 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$.

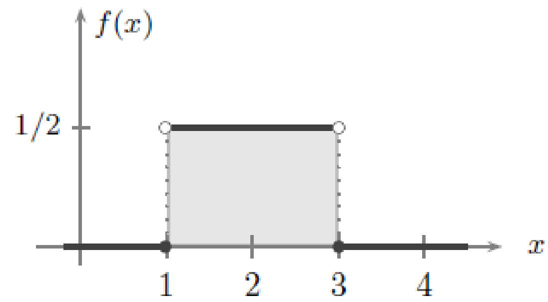
2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X\left(x_i\right) = 1$.

Es importante notar que en el caso de variables aleatorias continuas no es posible definir a la función de densidad como $P(X = x)$, ya que esta probabilidad es cero.

Ejemplo La función $f_X(x)$ dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{si } x \in (1, 3) \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

es una función de densidad de una variable aleatoria continua que toma valores en el intervalo$(1, 3)$.



Definición 8 *Función de distribución*

Sea X una variable aleatoria discreta o continua. La función de distribución de X, denotada por $F_X(x) : \mathbb{R} \to [0,1]$, se define como

$F_X(x) = P(X \leq x)$.

Por lo tanto, la función de distribución evaluada en un número x cualquiera es simplemente la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor menor o igual a x, o en otras palabras, que tome un valor en el intervalo $(-\infty, x]$. Siendo $F_X(x)$ una probabilidad, sus valores están siempre entre 0 y 1. Esta función resulta ser importante y se le conoce también, por razones evidentes, con el nombre de función de acumulación de probabilidad.

Propiedades de la función de distribución $F_X(x)$ de una variable aleatoria X.

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

2) $F_X(x)$ es no decreciente. (Si $x_1 \leq x_2$, entonces $F(x_1) \leq F(x_2)$)

3) $F_X(x)$ es continua por la derecha

4) $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$

5) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

6) Si $x_1 < x_2$, entonces $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

Encontremos las funciones de distribución en cada uno de los ejemplos vistos para funciones de densidad de variables aleatorias discretas y continuas

En el caso de la variable aleatoria discreta, el ejemplo consiste en lanzar tres monedas y contar el número de águilas, la función de densidad obtenida fue:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, \text{si } x = 0,3 \\ \frac{3}{8}, \text{si } x = 1,2 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

A partir de esta calculamos $F_X(x) = P(X \leq x)$ y obtenemos

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{8}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8}, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8}, & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Para el caso de variables aleatorias discretas, la función de distribución se define como la suma de las probabilidades de todos los valores x_i que son menores o iguales a x.

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i)$$

En general una función de distribución $F_X(x)$ de una variable aleatoria X es una función escalonada entre cero y uno y continua por la derecha.

En el caso de la variable aleatoria continua, la función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{si } x \in (1,3) \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Entonces la función de distribución se obtiene calculando la siguiente integral

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x-1}{2}, & \text{si } 1 < x < 3 \\ 1, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

En el caso continuo tenemos que para toda x en $\mathbb{R}$,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du,$$

de modo que por el teorema fundamental del cálculo, y cuando $F_X(x)$ es diferenciable, $\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)$. De este modo podemos encontrar $f_X(x)$ a partir de $F_X(x)$.

3.3 Esperanza, varianza, momentos

Todos los seres humanos tenemos características numéricas que nos identifican y nos distinguen de otras personas, por ejemplo, la edad, estatura, talla, peso, etc. Si pudiéramos considerar la totalidad de todos estos números para una persona en particular, la identificaríamos de manera única. Algo similar sucede con las variables aleatorias. En esta sección estudiaremos algunas características numéricas asociadas a las variables aleatorias.

Definición 9 *La* ***esperanza*** *de una variable aleatoria X es un número denotado por $E(X)$ y que se calcula como sigue:*

Si X es discreta, entonces

$E(X) = \sum_x xP(X = x)$

en donde la suma se efectúa sobre todos los posibles valores que pueda tomar la variable aleatoria, y se define cuando esta suma sea absolutamente convergente. El número de sumandos puede ser finito o infinito dependiendo del conjunto de valores de la variable aleatoria.

Si X es continua con función de densidad $f_X(x)$, entonces la esperanza es

$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\ f_X(x)dx$

suponiendo que esta integral es absolutamente convergente.

Si la suma o integral anteriores no cumplen esta condición de convergencia absoluta, entonces se dice que la esperanza no existe.

La esperanza de una variable aleatoria es entonces un número que indica el promedio ponderado de los diferentes valores que puede tomar la variable. A la esperanza se le conoce también con los nombre de: media, valor esperado o valor promedio. En general se usa la letra griega μ (mu) para denotarla. La integral o suma arriba mencionados pueden no ser convergentes y en ese caso se dice que la variable aleatoria no tiene esperanza finita. La esperanza es uno de los conceptos más importantes en probabilidad y tiene un amplio uso en las aplicaciones y otras ramas de la ciencia.

Proposición 10 *Sean X y Y variables aleatorias con esperanza finita y sea c una constante. Entonces*

a) $E(c) = c$

b) $E(cX) = cE(X)$

c) Si $X \geq 0$, entonces $E(X) \geq 0$

d) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Definición 11 *Vamos ahora a definir otra característica numérica asociada a las variables aleatorias llamada **varianza**. Se denota por $Var(X)$ y se define como sigue.*

$$Var(X) = \begin{cases} \sum\limits_x (x - E(X))^2 f_X(x) & \text{si } X \text{ es discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f_X(x)dx & \text{si } X \text{ es continua} \end{cases}$$

Observe que en una sola expresión la varianza se puede escribir como sigue:

$Var(X) = E\left[X - E(X)\right]^2$

La varianza es una medida del grado de dispersión de los diferentes valores tomados por la variable. Se le denota regularmente por la letra σ^2 (sigma cuadrada). A la raíz cuadrada positiva de la varianza, esto es σ, se le llama desviación estándar. Nuevamente la anterior suma o integral puede no existir y en ese caso decimos que la variable aleatoria no tiene varianza finita. Observemos que para calcular $Var(X)$ necesitamos conocer primero $E(X)$.

Proposición 12 *Sean X y Y variables aleatorias con esperanza finita y sea c una constante. Entonces*

a) $Var(X) \geq 0$
b) $Var(c) = 0$
c) $Var(cX) = c^2 Var(X)$
d) $Var(X + c) = Var(X)$
e) $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$
f) En general $Var(X + Y) \neq Var(X) + Var(Y)$

Definición 13 *Finalmente definimos el* ***n-ésimo momento*** *de una variable aleatoria X, cuando existe, como el número $E(X^n)$, para cualquier valor natural de n. El n-ésimo momento central de X, cuando existe, es el número $E[(X - \mu)^n]$, en donde $\mu = E(X)$. Observe que el primer momento de X es simplemente la media, y el segundo momento central es la varianza. Tenemos entonces que si X es una variable aleatoria con función de densidad $f_X(x)$ entonces el n-ésimo momento de X, si existe, se calcula como sigue:*

Proposición 14 ***Definición 15*** $E(X^n) = \begin{cases} \sum\limits_x x^n f_X(x) & \text{si } X \text{ es discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx & \text{si } X \text{ es continua} \end{cases}$

El n-ésimo momento central de X se calcula, como indican las siguientes fórmulas:

$$E\left[(X - \mu)^n\right] = \begin{cases} \sum\limits_x (x - \mu)\, f_X(x) & \text{si } X \text{ es discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^n\, f_X(x)dx & \text{si } X \text{ es continua} \end{cases}$$

4 Distribuciones discretas

Existen variables aleatorias cuyas funciones de densidad son modelos particulares para asignar probabilidades a subconjuntos de números reales. Empezaremos con las distribuciones de tipo discreto y continuaremos después con las de tipo continuo.

4.1 Bernoulli

Sea Ω un espacio muestral y A un evento cualquiera talque $P(A) = p$, a A lo llamaremos éxito y a su complemento A^c fracaso, desde luego la interpretación depende del contexto. Si X es la variable que asigna 1, si el resultado es éxito; y el número 0, si el resultado es frcaso; denotamos ésto por $X \sim Ber(p)$, que se lee, X se distribuye como una variable aleatoria *Bernoulli* con parámetro p.Su función de densidad está dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 1-p, \text{si } x = 0 \\ p \qquad \text{si } x = 1 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Repeticiones de esta variable nos permiten construir algunas de las variables aleatorias mas comunes como la binomial y la geométrica. A experimentos como éstos donde sólo hay dos posibilidades, A y A^c, se les conoce como experimentos o ensayos Bernoulli. En honor de Jaques Bernoulli, el que encontró el primer teorema límite de probabilidad.

Definición 16 *Variable aleatoria I_A, la indicadora del evento A.*

Sea Ω un espacio muestral y A cualquier evento. Se define la función indicadora de A como $I_A(\omega) = 1$, si $\omega \in A$; y $I_A(\omega) = 0$ en caso contrario, $\omega \notin A$. Una variable aleatoria indicadora del evento A se distribuye como Bernoulli con parámetro $p = P(A)$.

Esta variable sirve para construir estadísticos

4.2 Uniforme discreta

Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$ un espacio de probabilidad equiprobable con N elementos, se define $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $X(\omega_i) = x_i$, X es una variable aleatoria discreta que toma los valores $x_1, x_2, ..., x_N$ y denotamos por $X \sim u(x_1, x_2, ..., x_N)$ que se lee, X se distribuye como una variable aleatoria discreta uniforme con parámetros $x_1, x_2, ..., x_N$. Su función de densida esta dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{N}, \text{si } x = x_1, x_2, ..., x_N \\ 0 \qquad \text{en otro caso} \end{cases}$$

El espacio de probabilidad equiprobable nos lleva directamente a esta variable.

4.3 Geométrica

Consideremos una sucesión de ensayos independientes Bernoulli con probabilidad de éxito p y probabilidad de fracaso $q = 1 - p$. Sea X la variable que cuenta el número de ensayos hasta obtener el primer éxito. La denotaremos por $X \sim geo(p)$, que se lee como, X se distribuye como una variable aleatoria geométrica con parámetro p. Su función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} pq^{x-1}, \text{si } x = 1, 2, ... \\ 0 \qquad \text{en otro caso} \end{cases}$$

4.4 Hipergeométrica

Consideremos una población con N individuos, de los cuales M de ellos pertenecen al subconjunto A.Se toma una muestra de tamaño n. Definimos a X como el número de elementos en la muestra que pertenecen a A, por lo tanto $M \leq N$ y $n \leq N$. Ésto lo denotaremos por $X \sim hip(N, M, n)$, que se lee como la variable aleatoria se distribuye como hipergeométrica con parámetros N, M, y n. Su función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \text{si } x = 0, 1, 2, ..., N \\ 0 \qquad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta densidad utilizada cuando se esta estudiando una sola característica del la población a través de un muestreo simple, por ejemplo, el número de personas que votaron por el PRI en la última elección o la población que posée cierta enfermedad. Esta variable tmabién se usa en estadística no paramétrica. Sin embargo, por lo complicado que resulta calcular las combinaciones para pobaciones grnades, generalmente, la distribución de esta variable se aproxima con una variable binomial, y, en caso necesario, a su vez ésta la aproximamos por la distribución de una variable aleatoria normal.

4.5 Binomial

Se repite un ensayo Bernoulli en forma independiente n veces. Donde la probabilidad de éxito es p y la de fracaso es $q = 1 - p$. Definimos a la variable aleatoria X como el número de éxitos en los n ensayos. Denotamos por $X \sim Bin\,(n, p)$, se lee, X se distribuye como una variable aleatoria binomial con parámetros n y p y su función de densidad esta dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \text{si } x = 0, 1, 2, ..., n \\ 0 \qquad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Usamos esta variable siempre que tengamos n ensayos independientes, y sólo tengamos dos resultados posibles A y A^c

4.6 Poisson

Supongamos que deseamos observar el número de ocurrencias de un cierto evento dentro de un intervalo de tiempo dado, por ejemplo, el número de clientes que llegan a un cajero automático durante la noche, o tal vez deseamos registrar el número de accidentes que ocurren en cierta avenida durante todo un día. Para modelar este tipo de situaciones podemos definir la variable aleatoria X como el número de ocurrencia de este evento en el intervalo de tiempo dado. Es claro entonces que X puede tomar los valores 0, 1, 2, . . ., y en principio no ponemos una cota superior para el número de observaciones del evento. Adicionalmente supongamos que conocemos la tasa media de ocurrencia del evento de interés, que denotamos por la letra λ (lambda). El parámetro λ es positivo y se interpreta como el número promedio de ocurrencias del evento, por unidad de tiempo. Decimos que X tiene una distribución Poisson con parámetro $\lambda > 0$, y escribimos $X \sim Poisson(\lambda)$. La función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \text{si } x = 0, 1, 2, ... \\ 0 \qquad \text{en otro caso} \end{cases}$$

4.7 Ejercicios

1) Un cargamento de 1000 licuadoras provenientes de Taiwan tiene 100 defectuosos. Se eligen al azar 20 licuadoras y se prueban

a) Calcular la probabilidad de encontrar exactamente 10 artículos defectuosos

b) Calcular la probabilidad de que se encuentren al menos dos artículos defectuosos

2)Un lote de 10 motores eléctricos debe ser rechazado totalmente o bien vendido, segun el resultado del siguiente proceso: se eligen al azar dos motores y se inspeccionan. Si uno o más son defectuosos, el lote es rechazado; de otro modo es aceptado. Supongase que cada uno de los motores cuesta $750 y se vende a $1000 ¿Si el lote contiene 1 motor defectuoso, cuál es la utilidad esperada del fabricante?

3) Supóngase que se repite un experimento en forma independiente hasta obtener el primer éxito. Sin embargo el costo del primer ensayo es de \$10,000, mientras que los costos de los ensayos sucesivos es de \$500. Encontrar el valor esperado del dinero que se va a gastar si la probabilidad de éxito es de 0.75.

5 Distribuciones continuas

5.1 Uniforme

Sea X la variable aleatoria de escoger un punto al azar en el intervalo (a,b) con probabilidad uniforme. Es decir que intervalos de la misma longitud contenidos en (a,b) tendrán la misma probabilidad. Esto lo denotamos por $X \sim U(a,b)$, que se lee como la variable aleatoria se distribuye como una $uniforme$ en el intervalo (a,b) y su función de densidad se define como

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, \text{si } x \in (a,b) \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

La variable $U(a,b)$ se usa para hacer simulación de variables aleatorias.

5.2 Exponencial

Decimos que una variable aleatoria continua X tiene una distribución exponencial con parámetro $\lambda > 0$, y escribimos $X \sim exp(\lambda)$ cuando su función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{si } x > 0 \\ 0 \qquad \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

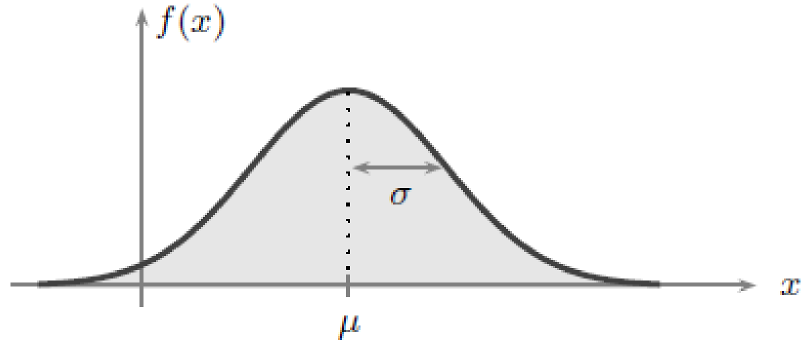
Esta distribución se ha usado para modelar tiempos de espera para la ocurrencia de un cierto evento.

5.3 Normal

Esta es posiblemente la distribución de probabilidad de mayor importancia. Decimos que la variable aleatoria continua X tiene una distribución normal si su función de densidad está dada por la siguiente expresión

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

en donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$ son dos parámetros. Escribimos entonces $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. La gráfica de esta función de densidad tiene forma de campana como se puede apreciar en la figura, en donde se muestra además el significado geométrico de los dos parámetros



Aplicando el Teorema Central del Límite se puede ver que la distribución de una variable aleatoria $Bin(n,p)$ tiende a la distribución $N(\mu,\sigma^2)$, con $\mu = np$ y $\sigma^2 = npq$.

Asimismo la distribución de una variable aleatoria $Poisson(\lambda)$ tiende a la distribución $N(\mu,\sigma^2)$, con $\mu = \lambda$ y $\sigma^2 = \lambda$.

5.4 Ji-Cuadrada

Decimos que la variable aleatoria continua X tiene una distribución ji-cuadrada con n grados de libertad (n entero positivo), si su función de densidad está dada por la siguiente expresión

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, \text{si } x > 0 \\ 0 \qquad \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Se trata de una variable aleatoria continua con posibles valores en el intervalo $(0,\infty)$. Esta distribución tiene un solo parámetro denotado aqui por la letra n, y al cual se le llama **grados de libertad**. A pesar de su aparente expresión complicada, no es difícil comprobar que $f_X(x)$ es efectivamente una función de densidad. Se denotara como $X \sim \chi^2_{(n)}$, Puede demostrarse que $E(X) = n$ y $Var(X) = 2n$.

5.5 Ejercicios

1) Supongase que la longitud X de una pieza de alambre tiene una distribución $N(100,16)$. Cada cuerda X produce una utilidad de \$25, si $X > 95$. En caso

contrario la cuerda puede usarse para un objetivo diferente y se obtiene una utilidad de $10 por cuerda. Encuentre la utilidad esperada por pieza de alambre.

2) Haciendo pruebas de la concentración letal de un químico encontrado en agua contaminada, se encontró que una cierta concentración matará el 20% de los peces que están expuestos a él por una semana

a) Si 20 peces son colocados en un tanque conteniendo esta concentración del químico, encontrar la probabilidad de que sobrevivan menos de 10.

b) Si 2000 peces son colocados en el mismo tanque encontrar la probabilidad de que sobrevivan el menos 1000.

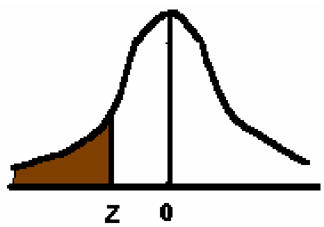
3) Los tiempos de servicio en una ventanilla de un banco se encontró que siguen una distribución exponencial con media 3.2 minutos

a) Un cliente llega a la ventanilla a las 12:00, encontrar la probabilidad de que a las 12:02 siga aún en la ventanilla.

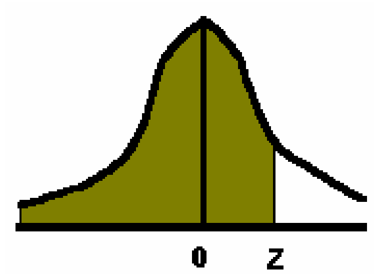
b) Encontrar la probabilidad de que continúe en servicio a las 12:04 dado que llegó a las 12:00 y a las 12:02 todavía lo estaban atendiendo.

4) En general, el mantenimiento preventivo es mas barato que el que se lleva a cabo una vez que el equipo falla, debido a que el mantenimiento preventivo se puede efectuar en períodos de tiempo menos críticos. Una pantalla utiliza 3000 bombillas cuya duración tiene una distribución $N\left(500, 50^2\right)$ .Para minimizar el número de bombillas que se funden durante la operación, todas las bombillas se cambian depués de un determinado número de horas. ¿Con que frecuencia deben de cambiarse todas las bombillas para que no más del 1% se fundan entre los períodos de reemplazo?

TABLA 3. DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

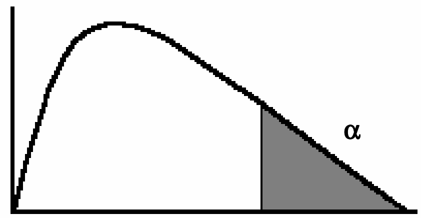


Z	*.09*	*.08*	*.07*	*.06*	*.05*	*.04*	*.03*	*.02*	*.01*	*.00*
-3.9	.00005	.00005	.00005	.00005	.00006	.00006	.00006	.00006	.00007	.00007
-3.8	.00007	.00007	.00008	.00008	.00008	.00009	.00009	.00010	.00010	.00010
-3.7	.00011	.00011	.00012	.00012	.00013	.00013	.00014	.00014	.00015	.00015
-3.6	.00016	.00016	.00017	.00018	.00018	.00019	.00020	.00021	.00021	.00022
-3.5	.00023	.00024	.00025	.00026	.00027	.00028	.00029	.00030	.00031	.00032
-3.4	.00034	.00034	.00036	.00038	.00039	.00040	.00042	.00043	.00045	.00047
-3.3	.00048	.00050	.00052	.00054	.00056	.00058	.00060	.00062	.00064	.00066
-3.2	.00069	.00071	.00074	.00076	.00079	.00082	.00084	.00087	.00090	.00093
-3.1	.00097	.00100	.00103	.00107	.00111	.00114	.00118	.00122	.00126	.00131
-3.0	.00100	.00103	.00107	.00111	.00114	.00118	.00122	.00126	.00131	.00135
-2.9	.00139	.00144	.00149	.00154	.00159	.00164	.00169	.00175	.00181	.00187
-2.8	.00193	.00199	.00205	.00212	.00219	.00226	.00233	.00240	.00248	.00255
-2.7	.00263	.00272	.00280	.00289	.00298	.00307	.00317	.00326	.00336	.00347
-2.6	.00357	.00368	.00379	.00391	.00402	.00414	.00427	.00440	.00453	.00466
-2.5	.00489	.00494	.00508	.00523	.00539	.00554	.00570	.00587	.00604	.00621
-2.4	.00639	.00657	.00676	.00695	.00714	.00734	.00755	.00776	.00798	.00820
-2.3	.00842	.00866	.00889	.00914	.00939	.00964	.00990	.01017	.01044	.01072
-2.2	.01101	.01130	.01160	.01191	.01222	.01254	.01287	.01321	.01355	.01390
-2.1	.01426	.01463	.01500	.01539	.01578	.01618	.01659	.01700	.01743	.01786
-2.0	.01831	.01876	.01923	.01970	.02018	.02067	.02118	.02169	.02222	.02275
-1.9	.02329	.02385	.02442	.02500	.02559	.02619	.02680	.02743	.02807	.02872
-1.8	.02938	.03005	.03074	.03144	.03216	.03288	.03362	.03438	.03515	.03593
-1.7	.03673	.03754	.03837	.03920	.04006	.04093	.04181	.04272	.04363	.04456
-1.6	.04551	.04648	.04746	.04846	.04947	.05050	.05155	.05262	.05370	.05480
-1.5	.05592	.05705	.05821	.05938	.06057	.06178	.06301	.06425	.06552	.06681
-1.4	.06811	.06944	.07078	.07214	.07353	.07493	.07636	.07780	.07927	.08076
-1.3	.08226	.08379	.08534	.08691	.08851	.09012	.09176	.09342	.09510	.09680
-1.2	.09852	.10027	.10204	.10383	.10565	.10749	.10935	.11123	.11314	.11507
-1.1	.11702	.11900	.12100	.12302	.12507	.12714	.12924	.13136	.13350	.13567
-1.0	.13786	.14007	.14231	.14457	.14686	.14917	.15150	.15386	.15625	.15865
-0.9	.16109	.16354	.16602	.16853	.17105	.17361	.17619	.17879	.18141	.18406
-0.8	.18673	.18943	.19215	.19489	.19766	.20045	.20327	.20611	.20897	.21185
-0.7	.21476	.21769	.22065	.22363	.22663	.22965	.23269	.23576	.23885	.24196
-0.6	.24510	.24825	.25143	.25463	.25785	.26109	.26435	.26763	.27093	.27425
-0.5	.27759	.28096	.28434	.28774	.29116	.29460	.29806	.30153	.30503	.30854
-0.4	.31207	.31561	.31918	.32276	.32635	.32997	.33360	.33724	.34090	.34459
-0.3	.34827	.35197	.35569	.35942	.36317	.36693	.37070	.37448	.37828	.38209
-0.2	.38591	.38974	.39358	.39743	.40129	.40516	.40905	.41294	.41683	.42074
-0.1	.42465	.42858	.43250	.43644	.44038	.44433	.44828	.45224	.45620	.46017
-0.0	.46414	.46812	.47210	.47609	.48006	.48405	.48803	.49202	.49601	.50000



Z	*.00*	*.01*	*.02*	*.03*	*.04*	*.05*	*.06*	*.07*	*.08*	*.09*
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54395	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56750	.57124	.57534
0.2	.57926	.58617	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61781	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79373	.79955	.80234	.80510	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82124	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87923	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89616	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91308	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96079	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96637	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98299	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99001	.99036	.99061	.99086	.99110	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99491	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99597	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99830	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99860
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99897	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99956	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

TABLA 5. DISTRIBUCIÓN JI-CUADRADA



Grados de libertad	*α=.995*	*α=.99*	*α=.975*	*α=.95*	*α=.90*	*α=.10*	*α=.05*	*α=.025*	*α=.01*	*α=.005*
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.597
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.345	12.838
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.143	13.277	14.860
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2364	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.5650	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.6009	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.6972	6.4078	7.5642	8.6718	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.2648	7.0149	8.2307	9.3905	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.8440	7.6327	8.9065	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.4338	8.2604	9.5908	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.0337	8.8972	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.6427	9.5425	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.2604	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.8862	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.43	104.21
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17