Índice general

Capítulo 1

Álgebra de Matrices

En estadística, el álgebra de matrices es muy usada, especialmente en modelos lineales y análisis multivariado. Algunos conceptos, tales como, la salud del individuo, el crecimiento de una población, etc. no se pueden definir adecuadamente con un simple número, por lo que se requiere un arreglo de varias dimensiones para su adecuada descripción.

1.1. Conceptos Fundamentales

1.1.1. Vectores y Matrices

Definición (matriz):

Una ***matriz*** es un arreglo rectangular de elementos.

Definición (dimensión de una matriz):

Si una matriz tiene m renglones y n columnas se dice que es de ***dimensión*** $m \times n$.

La *componente ij-ésima de A*, denotada por a_{ij}, es el número que aparece en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de A. Indicaremos las matrices por las letras mayúsculas itálicas. Entonces la matriz A de dimensión $m \times n$ se denota como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definición (matriz cuadrada):

Si A es una matriz de $m \times n$ con $m = n$, entonces A recibe el nombre de ***matriz cuadrada***.

Definición (matriz nula):

Una matriz A de $m \times n$ en la que todas sus componentes son cero se llama ***matriz cero*** de $m \times n$ o ***matriz nula***.

Definición (matriz diagonal):

Se dice que una matriz cuadrada es ***diagonal*** si todos los elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero.

Notación: en ocasiones las matrices se presentan entre corchetes en vez de paréntesis.

Definición (vector):

Un vector columna de n componentes es un conjunto ordenado de números y se escribe como

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

En otras palabras, un vector es una matriz columna o un renglón. Los vectores se denotan como $\mathbf{x}$ ó $\underline{x}$. La notación $\mathbf{x}$ supone un vector columna, mientras que el vector renglón está dado por el transpuesto de un vector columna $\mathbf{x}^t$.

La palabra "ordenado" que aparece en la definición de vector es esencial. Dos vectores cuyas componentes sean iguales pero escritas en distinto orden, **no** son iguales. La interpretación geométrica de un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ es un punto en el plano XY ($\mathbb{R}^2$).

Se pude calcular la magnitud de un vector de la siguiente manera. Si tenemos el vector $\mathbf{x}^t = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ entonces la magnitud de $\mathbf{x}$, que se denota por $L_\mathbf{x}$ se define como

$$L_\mathbf{x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Un vector $\mathbf{x}$ es unitario si su magnitud es uno.

Ejemplos:

$$A_{4\times 3} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} = 6 \\ a_{21} = 4 \\ a_{32} = -1 \\ a_{43} = -2 \end{matrix} \qquad B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} b_{23} = 3 \\ b_{21} = -5 \end{matrix}$$

Los vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ son distintos:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad L_\mathbf{x} = L_\mathbf{y} = L_\mathbf{z} = \sqrt{55}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{matriz} \\ \text{cuadrada} \\ \text{simétrica} \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{matriz} \\ \text{nula} \\ 3 \times 3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{matriz} \\ \text{identidad} \\ 3 \times 3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{matriz} \\ \text{diagonal} \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{matriz} \\ \text{triangular} \\ \text{superior} \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{matriz} \\ \text{triangular} \\ \text{inferior} \end{matrix}$$

1.1.2. Transpuesta

Definición (matriz transpuesta):

Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces la ***transpuesta*** de A, es la matriz de $n \times m$ que se obtiene al intercambiar los renglones y las columnas de A y se escribe $A^t = [a_{ji}]$.

La transpuesta de A se denota por A^t, A^T ó A'. Entonces,

$$\text{si} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{entonces} \quad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En otras palabras, el i-ésimo renglón de A pasa a ser la i-ésima columna de A^t, y la j-ésima columna de A pasa a ser el j-ésimo renglón de A^t.

Propiedades: Supóngase que $A = [a_{ij}]$ es una matriz de $n \times m$ y que $B = [b_{ij}]$ es una matriz de $m \times p$. Entonces

1. $(A^t)^t = A$.
2. $(AB)^t = B^t A^t$.
3. Si A y B son de dimensión $n \times m$, entonces $(A + B)^t = A^t + B^t$.

Definición (matriz simétrica):

Se dice que una matriz cuadrada es ***simétrica*** si $A = A^t$, de manera que $a_{ij} = a_{ji}$ para toda i y para toda j.

Ejemplos:

- $$A = A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 0 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad A^t = A^t_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 9 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

- $$B = B_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 8 & -1 & 1 \\ 9 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^t = B^t_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- C y D son matrices simétricas

$$C = C_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = D_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

1.2. Operaciones de Matrices

1.2.1. Adición y Multiplicación

Adición de Matrices

Denotamos por A y B a dos matrices de $m \times n$ por $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$. Entonces la suma de A y B es la matriz $A + B$ de $m \times n$ dada por:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, $A + B$ es la matriz $m \times n$ que se obtiene al sumar las componentes correspondientes de A y B. La suma entre matrices se restringe a que ambas deben tener la misma dimensión.

Multiplicación de una Matriz por un Escalar

Si $A = [a_{ij}]$ es la matriz de $m \times n$ y si α es un escalar (número) entonces la matriz αA de $m \times n$ está dada por

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}] = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, αA es la matriz que se obtiene al multiplicar cada una de las componentes de A por α.

Propiedades

Sean A, B y C matrices de $m \times n$ y α un escalar. Entonces:

1. $A + \mathbf{0} = A$ ($\mathbf{0}$ es la matriz cero de $m \times n$).
2. $0A = \mathbf{0}$ (0 es el escalar 0).
3. $A + B = B + A$ (ley conmutativa).

4. $(A+B)+C = A+(B+C)$ (lay asociativa).
5. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ (ley distributiva).

Ejemplos:

Sean $\alpha = -2$ y 0 escalares, y las matrices A, B, C y $\mathbf{0}$ dadas por

$$A = A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C = C_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{0} = \mathbf{0}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A+B$

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & -3 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

- $A-B$

$$A-B = A+(-1)B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \\ 5 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}$$

- $0A$

$$0A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

- A y C, y B y C no se pueden sumar porque tienen dimensión distinta.
- αA

$$\alpha A = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -6 & 0 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$$

- αC

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

1.2.2. Productos de Vectores y Matrices

Productos de Vectores

Sean $\mathbf{x}^t = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{y}^t = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dos vectores de n componentes. El *producto punto* (o *producto interno*) de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, denotado por $\mathbf{x} * \mathbf{y}$, está dado por

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

El producto punto de dos vectores de n componentes es un escalar.

Propiedades
Sean $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ vectores de n componentes y α un escalar. Entonces:

1. $0 * \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
2. $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{y} * \mathbf{x}$.
3. $\mathbf{x} * (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} * \mathbf{y} + \mathbf{x} * \mathbf{z}$.
4. $(\alpha\mathbf{x}) * \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} * \mathbf{y})$.

Productos de Matrices

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de $m \times n$ y $B = [b_{jk}]$ una matriz de $n \times p$. Entonces el producto de A y B es la matriz $C = [c_{ik}]$ de $m \times p$ tal que

$$c_{ik} = (i\text{-ésimo renglón de } A) * (k\textit{-ésima columna de } B).$$

Dicho de otra manera, el elemento ik-ésimo de $C = AB$ es igual al producto del i-ésimo renglón de A y la k-ésima columna de B. Si se desarrolla se obtiene que

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}.$$

Dos matrices se pueden multiplicar sólo si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de renglones de la segunda. Cuando se multiplican dos matrices, es útil escribir su dimensión a manera de verificar que el número de renglones y columnas coincidan. Es decir,

$$AB = A_{m\times n}B_{n\times p} = C_{m\times p} = C.$$

Nota: en general, el producto de matrices no es conmutativo, es decir, $AB \neq BA$.

Definición (matriz idempotente):

Sea A una matriz cuadrada, si $A^2 = AA = A$, entonces la matriz es ***idempotente***.

Propiedades

1. $A(BC) = (AB)C$ (ley asociativa).
2. $A(B + C) = AB + AC$ y $(A + B)C = AC + BC$ (ley distributiva).

Ejemplos:

Sean

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_{2\times 3} \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} * \mathbf{y} = 9 \qquad C_{3\times 3} = AB = \begin{pmatrix} 42 & 0 & -14 \\ 0 & 9 & 3 \\ -7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad D_{2\times 2} = BA = \begin{pmatrix} 45 & 19 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$$

1.2.3. Operaciones Elementales de Renglón

Las operaciones elementales por renglón son:

1. Multiplicar (o dividir) un renglón por (entre) un número distinto de cero.
2. Sumar el múltiplo de un renglón a otro renglón.
3. Intercambiar dos renglones.

El proceso de aplicar operaciones elementales de renglón con el propósito de simplificar una matriz aumentada se llama *reducción por renglones*.

La notación correspondiente a cada una de las operaciones elementales de renglón es como sigue:

1. $R_i \to cR_i$ significa "sustituyáse el i-ésimo renglón por el i-ésimo renglón multiplicado por c".
2. $R_j \to R_j + cR_i$ significa "sustitúyase el j-ésimo renglón por la suma del j-ésimo renglón y el i-ésimo renglón multiplicado por c".
3. $R_i \leftrightarrow R_j$ significa "intercámbiense los renglones i y j".

Una vez que se tiene la matriz escalonada reducida, ésta da la solución al sistema, proporcionando los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad R_1 \to -2R_1 \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad R_1 \to R_1 + 2R_2 \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad R_1 \leftrightarrow R_2 \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

1.2.4. Traza

La *traza* de una matriz cuadrada A de orden $n \times n$ es la suma de los términos de la diagonal, es decir

$$\text{traza}(A) = \text{traza}(A_{n\times n}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Se puede mostrar que si AB es cuadrada, entonces

$$\text{traza}(AB) = \text{traza}(BA),$$

aunque no necesariamente A y B deben ser cuadradas.

Propiedades

1. $\text{traza}(A^t) = \text{traza}(A)$.
2. $\text{traza}(cA) = c * \text{traza}(A)$.
3. $\text{traza}(A + B) = \text{traza}(A) + \text{traza}(B)$.
4. $\text{traza}(AB) = \text{traza}(BA)$
5. $\text{traza}(ABC) = \text{traza}(BCA) = \text{traza}(CAB)$.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{traza}(A) = 1 + 3 + 6 = 10$$

1.2.5. Determinantes

Sea A una matriz de 2×2,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

el determinante de $A = A_{2\times 2}$ se define como

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

El determinante de una matriz de orden $n \times n$ se definirá en forma inductiva como sigue:

Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$, el determinante de A es un escalar tal que

$$\det(A) = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

donde

$A_{ij} = (-1)^{i+j} *$ determinante de la matriz A sin el i-ésimo renglón y la j-ésima columna.

A_{ij} se conoce como la ij-ésima menor de A.

Para el caso de una matriz de A de 3×3, el determinante es

$$\det(A_{3\times 3}) = |A_{3\times 3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ -a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} \end{array}.$$

Definición (matriz no singular):

Se dice que una matriz es ***no singular*** si su determinante es distinto de cero.

Propiedades

1. $|A| = |A^t|$.
2. $|AB| = |BA|$.
3. $|cA_{n\times n}| = c^n|A_{n\times n}|$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1) - (4)(-3) = 14$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 9 & 6 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |B| = b_{11}B_{11} + b_{12}B_{12} + b_{13}B_{13}$$

$$\begin{aligned}
B_{11} &= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (1)[(9)(1) - (6)(-2)] = 9 + 12 = 21 \\
B_{12} &= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)[(2)(1) - (6)(-1)] = (-1)(2+6) = -8 \\
B_{13} &= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (1)[(2)(-2) - (9)(-1)] = -4 + 9 = 5
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad |B| = 1(21) + 4(-8) + 0(5) = 21 - 32 = -11$$

1.2.6. Inversa de una Matriz Cuadrada

En primer lugar definiremos la matriz identidad.

Definición (matriz identidad):

La ***matriz identidad*** $\mathbf{I}_n$ de $n \times n$ es la matriz tal que los elementos de su diagonal principal son iguales a uno, y los elementos que están fuera de la diagonal principal son iguales a cero, es decir,

$$\mathbf{I}_n = [b_{ij}] \qquad \text{donde} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$, entonces,

$$A\mathbf{I}_n = A = \mathbf{I}_n A.$$

En otras palabras, $\mathbf{I}_n$ conmuta con toda matriz de $n \times n$ y las deja inalteradas de cada multiplicación por la derecha o por la izquierda.

Sean A y B matrices de $n \times n$. Supongamos que

$$AB = BA = \mathbf{I}_n,$$

entonces a B se le llama inversa de A, y se escribe como A^{-1}. Se tiene entonces que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{I}_n.$$

Si A tiene inversa, se dice que A es *invertible*.

Si una matriz cuadrada A es *invertible*, entonces su inversa es única.

Sean A y B matrices invertibles de $n \times n$, entonces AB es invertible y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Obtención de una Matriz Inversa

Sea A una matriz cuadrada de dimensión $n \times n$. Su inversa A^{-1}, se obtendrá de la siguiente manera:

1. Escríbase
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

2. Aplicando operaciones por renglones a ambas matrices, se transformará la matriz A (a la izquierda) en la matriz identidad de orden $n \times n$. Debido a que las operaciones por renglones se aplicarán de manera simultánea a las dos matrices, la identidad (a la derecha) irá cambiando también.

3. A^{-1} será la matriz que quede al lado derecho ($\mathbf{I}$ originalmente) como resultado de transformar A en $\mathbf{I}$. Finalmente tendremos
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & A^{-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \end{array}\right)$$

Nota: en ocasiones un sistema de ecuaciones homogéneo puede no tener solución, o bien no tener una solución única. Nos damos cuenta de esto cuando no es posible pasar de la matriz aumentada a la escalonada reducida. Por ejemplo, queda un cero en la diagonal. De manera similar, una matriz puede no ser invertible. De esto nos damos cuenta cuando es imposible transformar a la matriz A en la matriz identidad $\mathbf{I}_{n\times n}$.

Ejemplos:

Sea A una matriz de 2×2, deseamos obtener su matriz inversa, A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

escribimos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

el lado izquierdo debe transformarse en la matriz identidad $\mathbf{I}_{2\times 2}$,

$$\Rightarrow R_1 \to \frac{1}{2}R_1 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow R_2 \to R_2 + 4R_1 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow R_2 \to -R_2 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow R_1 \to R_1 + \frac{3}{2}R_2 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & -3/2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1.2.7. Dependencia Lineal y Rango

Se dice que un conjunto de vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p$ son *linealmente dependientes* si existen constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ las cuales no son todas iguales a cero, tales que

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0},$$

de lo contrario, se dice que los vectores son *linealmente independientes*.

Esta definición nos lleva a la idea de *rango* de una matriz, el cual se define como el número máximo de renglones que son linealmente independientes, o de manera equivalente, como el número máximo de columnas que son linealmente independientes. Si A es de orden $m \times n$, entonces el rango de A es tal que $\text{rango}(A) \leq \text{mín}(m, n)$. Encontramos que

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A^t) = \text{rango}(AA^t) = \text{rango}(A^tA).$$

Si A es una matriz cuadrada no singular de orden $n \times n$, entonces A es de rango completo n. Pero si A es singular, entonces los renglones y las columnas son linealmente dependientes y $\text{rango}(A) < n$.

Ejemplos:

Sean los vectores

$$\mathbf{x}^t = (1, 0, -1, 2)\,, \quad \mathbf{y}^t = (4, 0, -4, 8)\,, \quad \mathbf{z}^t = (6, 2, 2, 0)$$

entonces $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son linealmente dependientes porque $\mathbf{x} - 4\mathbf{y} = (0, 0, 0, 0)^t$; y los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{z}$ son linealmente independientes pues no existe un $\alpha \neq 0$ tal que $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{z} = (0, 0, 0, 0)^t$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{rango}(A) = 2 \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{rango}(B) = 3$$

1.2.8. Matrices Definidas y Semi-Definidas Positivas

Una matriz cuadrada A se llama:

- *definida positiva* si $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- *semidefinida positiva* si $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} \geq 0$ para todo $\mathbf{x}$.

Si A es definida positiva, entonces también es semidefinida positiva.

Ejemplos:

- A no es semidefinida positiva ni definida positiva, porque existe un $\mathbf{x} \neq (0, 0)^t$ tal que $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} < 0$. Sea $\mathbf{x} = (2, -1)^t$, entonces $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = -3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{aligned} &= x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 \\ &= (x_1 + 5x_2)(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

- B es semidefinida positiva porque $\mathbf{x}^t B\mathbf{x} = (x_1 + 3x_2)^2 \geq 0$ para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^t B\mathbf{x} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{aligned} &= x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 \\ &= (x_1 + 3x_2)^2 \end{aligned}$$

- C es definida positiva porque $\mathbf{x}^t C\mathbf{x} = x_1^2 + 4x_2^2 > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq (0, 0)^t$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^t B\mathbf{x} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_2^2$$

1.3. Sistemas de Ecuaciones Lineales

1.3.1. Transformaciones Lineales

Si el dominio de una función T es $\mathbb{R}^n$ y su contradominio es $\mathbb{R}^m$, entonces a T se le conoce como *transformación* de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, y se denota como $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se define por las ecuaciones de la forma

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & z_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & z_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & z_n \end{array}$$

En notación matricial se tiene que $W = AX$. La matriz A se le conoce como matriz estándar para la transformación T

Ejemplos

- Las ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & x_1 + x_2 \\ w_2 & = & 3x_1x_2 \\ w_3 & = & x_1^2 + x_2^2 \end{array}$$

  define una transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donde

$$T(x_1, x_2) = (w_1, w_2, w_3) = (x_1 + x_2\ ,\ 3x_1x_2\ ,\ x_1^2 + x_2^2)$$

  entonces si $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$, entonces

$$T(1, -2) = (w_1, w_2, w_3) = (1 - 2, 3(1)(-2), 1^2 + (-2)^2) = (-1, -6, 5)$$

- La transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por las ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 \\ w_2 & = & 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \\ w_3 & = & 5x_1 - x_2 + 4x_3 \end{array}$$

  se puede expresar en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

1.3.2. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Los sistemas de ecuaciones se utilizarán para encontrar valores propios, así como para obtener la inversa de una matriz cuadrada. Sólo veremos sistemas de ecuaciones homogéneos, que se resolverán por el método de eliminación de Gauss-Jordan.

Tenemos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas de la forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & z_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & z_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & z_n \end{array}$$

El primer paso para resolver este sistema de ecuaciones es escribir el sistema como una *matriz aumentada*, la cual tiene la siguiente forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & z_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & z_n \end{array}\right)$$

La idea es convertir esta matriz en una matriz escalonada reducida por renglones, que tendría la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} & c_1 \\ 0 & 1 & b_{23} & \cdots & b_{2n} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & b_{2n} & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_n \end{array}\right)$$

La manera de conseguir esto es realizando operaciones elementales de renglón sobre la matriz aumentada.

Ejemplos:

Resuelve el sistema de ecuaciones homogéneo (con solución única):

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 18 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 24 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

La matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

necesitamos reducirla a la forma escalonada,

$$\Rightarrow R_1 \to \frac{1}{2}R_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 4R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow R_2 \to -\frac{1}{3}R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right) \quad \Rightarrow R_3 \to R_3 + 5R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow R_3 \to -R_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

para obtener los valores de x_1, x_2 y x_3 debemos resolver las ecuaciones implicitas en la matriz escalonada.

Por R_3 obtenemos que $x_3 = 3$.

En R_2 tenemos la ecuación $x_2 + 2x_3 = 4$, dado que ya conocemos el valor de x_3, entonces $x_2 + 2(3) = 4$, por lo tanto $x_2 = -2$.

En R_1 tenemos la ecuación $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$, dado que ya conocemos x_2 y x_3, entonces $x_1 + 2(-2) + 3(3) = 9$, implica que $x_1 = 4$.

1.4. Raíces y Vectores Característicos

Vectores paralelos: dos vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son paralelos si el ángulo entre ellos es cero o π. Pueden tener direcciones iguales u opuestas. Si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ para alguna constante $\alpha \neq 0$ si y sólo si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son paralelos.

Vector y *valor característico* o *vector* y *valor propio* o *eigen vector* y *eigen valor*. Sea A una matriz $p \times p$. El número λ recibe el nombre de valor característico de A si existe algún vector diferente de cero $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^p$ tal que

$$A\mathbf{c} = \lambda\mathbf{c}.$$

Se dice que el vector $\mathbf{c}$ es el vector característico (o vector propio o eigen valor) de A correspondiente al valor característico (o valor propio o eigen valor) λ.

Geométricamente, lo que hace el vector propio $\mathbf{c}$ al multiplicar a la matriz A es crear un nuevo vector que es paralelo al mismo vector propio $\mathbf{c}$.

Sea A una matriz de $p \times p$, entonces λ es un valor propio de A si y sólo si

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbf{I}) = 0,$$

en donde $p(\lambda)$ es un polinomio de λ de grado p, y es conocido como *polinomio característico* de A.

Las raíces de $p(\lambda)$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ son los valores propios de A. Toda matriz de $p \times p$ tiene exactamente p valores característicos.

A cada valor propio λ_i le corresponde un vector propio $\mathbf{c}_i$ que será el vector propio tal que

$$A\mathbf{c}_i = \lambda_i \mathbf{c}_i.$$

Los vectores propios no son únicos ya que contienen un factor de escala arbitrario. Por consiguiente, con frecuencia se les normaliza de manera que $\mathbf{c}^t\mathbf{c} = 1$. Cuando haya valores propios iguales (raíces repetidas de $p(\lambda)$)), los vectores propios correspondientes se eligirán de manera que sean ortogonales.

Procedimientos para calcular valores y vectores propios

1. Encontrar $p(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbf{I})$.
2. Calcular las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ de $p(\lambda) = 0$.
3. Resolver el sistema homogéneo $(A - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{c}_i = \mathbf{0}$ que corresponde a cada valor característico de λ_i.

Propiedades útiles

Sea A una matriz de orden $p \times p$

1. $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = \text{traza}(A)$.
2. $|A| = \det(A) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i = \lambda_1 * \lambda_2 * \cdots * \lambda_p$.
3. Si A es una matriz de número reales simétrica, entonces sus valores propios y vectores propios son reales.
4. Si A es definida positiva, entonces todos los valores propios son estrictamente positivos.

Ejemplos:

Sea A una matriz 3×3, deseamos obtener sus valores propios y sus correspondientes vectores propios,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Primero vamos a encontrar el polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbf{I})$,

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{array}{c} (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) + (3)(1)(4) + (2)(-1)(-1) \\ -(1-\lambda)(1)(-1) - (3)(-1)(-1-\lambda) - (2)(2-\lambda)(4) \end{array}$$

es decir

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = -(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3)$$

las raíces del polinomio característico son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = 3$, tales que $p(\lambda_i) = 0$ para $i = 1, 2, 3$, ahora necesitamos resolver el sistema $(A - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{c}_i = \mathbf{0}$ para cada valor propio λ_i.

Para $\lambda_1 = 1$,

$$(A - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{c}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

este es un sistema de ecuaciones homogéneo, lo resolvemos a través del método de eliminación de Gauss-Jordan, usando su matriz aumentada correspondiente,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \; R_2 \to \tfrac{1}{3} R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \; R_3 \to R_3 - 2R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

por lo tanto el sistema es

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_3 \\ x_2 &= 4x_3 \end{aligned}$$

una solución sería

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si queremos que el vector este normalizado, entonces pedimos que $\mathbf{c}_1^t \mathbf{c}_1 = 1$ y por lo tanto el vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 1$ es

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = -2$,

$$(A - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{c}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

este es un sistema de ecuaciones homogéneo, lo resolvemos a través del método de eliminación de Gauss-Jordan, usando su matriz aumentada correspondiente,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} R_2 \to R_2 + 4R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{array} \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 15 & 0 & 15 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \; R_2 \to \tfrac{1}{15}R_2 \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \begin{array}{l} R_1 \to R_1 - 4R_2 \\ R_3 \to R_3 - 5R_2 \end{array} \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

por lo tanto el sistema es

$$\begin{array}{l} x_2 = -x_1 \\ x_3 = -x_1 \end{array}$$

una solución sería

$$\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

si queremos que el vector este normalizado, entonces pedimos que $\mathbf{c}_2^t\mathbf{c}_2 = 1$ y por lo tanto el vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = -2$ es

$$\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_3 = 3$,

$$(A - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{c}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

este es un sistema de ecuaciones homogéneo, lo resolvemos a través del método de eliminación de Gauss-Jordan, usando su matriz aumentada correspondiente,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \; R_2 \to \tfrac{1}{5}R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \; R_1 \to R_1 + 2R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

por lo tanto el sistema es

$$\begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{array}$$

una solución sería

$$\mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si queremos que el vector este normalizado, entonces pedimos que $\mathbf{c}_3^t\mathbf{c}_3 = 1$ y por lo tanto el vector propio asociado al valor propio $\lambda_3 = 3$ es

$$\mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

1.5. Ejercicios

Considera las siguientes matrices y vectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Realiza las siguientes operaciones:

- $A + B$, $A^t + B^t$, $C + D$, $C^t + D^t$, $(C + D)^t$.
- AB, $B^tA^t = (AB)^t$, CD, $C^tD^t = (DC)^t$, $CD^t = (DC^t)^t$.
- $\mathbf{wy}$, $\mathbf{yw}$, $\mathbf{w} * \mathbf{x} = \mathbf{x} * \mathbf{w}$, $\mathbf{xz}$, $\mathbf{zw}$.
- Calcula la magnitud de los vectores $\mathbf{w}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$.
- $\text{traza}(A) = \text{traza}(A^t)$, $\text{traza}(B) = \text{traza}(B^t)$, $\text{traza}(A + B) = \text{traza}(A) + \text{traza}(B)$, $\text{traza}(CD) = \text{traza}(DC) = \text{traza}(D^tC^t) = \text{traza}(C^tD^t)$, $\text{traza}(CD^t) = \text{traza}(D^tC) = \text{traza}(DC^t) = \text{traza}(C^tD)$.
- Calcula los determinantes de la matrices A, B, C y D
- Indique si las matrices A, B, C y D son: cuadrada, nula, diagonal, simétrica, idempotente, no singular.
- Calcule la inversa de las matrices A, B, C y D, indicando las operaciones por renglones en cada uno de los pasos.
- Calcula el rango de las matrices A, B, C y D.
- Determina si las matrices A, B, C y D son definidas positivas, semidefinidas positivas o no lo son.
- Calcula los valores propios y sus correspondientes vectores propios de las matrices A, B, C y D.

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 23 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ -4x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = -13 \end{cases}$$