0.0.1. Esquemas de muestreo

En el análisis de tablas de contingencia de dos dimensiones se utilizan tres esquemas de muestreo que ocurren en la práctica: Esquema Poisson, Esquema Multinomial, y Esquema Multinomial-Producto.

Esquema Poisson

Supone que se observa cualquier cantidad de datos $\{n_{ij}\}$ durante un intervalo de tiempo. La distribución marginal de las observaciones n_{ij} es $Poisson(m_{ij})$, para $i = 1, \ldots, I,\ j = 1, \ldots, J$. Las probabilidades marginales son

$$P(n_{ij}|m_{ij}) = e^{-m_{ij}} \frac{m_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!},$$

donde $\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} = n_{\cdot\cdot}$, $E(n_{ij}) = m_{ij}$.

La función de verosimilitud queda expresada como

$$L(m) = L(\{m_{ij}\}) = \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} e^{-m_{ij}} \frac{m_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!}.$$

Esquema Multinomial

Este esquema supone que el número total de observaciones $n_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij}$ es fijo. Se tienen $I \times J$ categorías con probabilidad $Multinomial(n_{\cdot\cdot}, \{p_{ij}\})$, en donde las probabilidades están dadas por

$$P(n_{ij}|m_{ij}) = \frac{n_{\cdot\cdot}!}{\prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} n_{ij}!} \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} p_{ij}^{n_{ij}},$$

donde $\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} = n_{\cdot\cdot}$, $\prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} p_{ij} = 1$, $m_{ij} = E(n_{ij}) = n_{\cdot\cdot} p_{ij}$, y $p_{ij} = \frac{m_{ij}}{n_{\cdot\cdot}}$. Además $m_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} m_{ij} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{\cdot\cdot} p_{ij} = n_{\cdot\cdot}$.

La función verosimilitud es

$$
\begin{aligned}
L(m) &= L(\{m_{ij}\}) \\
&= \frac{n_{..}!}{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} n_{ij}!}\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} p_{ij}^{n_{ij}} \qquad \text{dado que} \quad p_{ij} = \frac{m_{ij}}{n_{..}} \\
&= \frac{n_{..}!}{\prod_{ij} n_{ij}!}\prod_{ij}\left(\frac{m_{ij}}{n_{..}}\right)^{n_{ij}} \\
&= \frac{n_{..}!}{\prod_{ij} n_{ij}!}\prod_{ij}\left(\frac{m_{ij}}{n_{..}}\right)^{n_{ij}} \frac{e^{-\sum_{ij} m_{ij}}}{e^{-m_{..}}} \qquad \text{dado que} \quad n_{..} = m_{..} \\
&= \frac{n_{..}!}{e^{-n_{..}}\prod_{ij} n_{..}^{n_{ij}}}\prod_{ij}\left(e^{-m_{ij}}\frac{m_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!}\right) \\
&\propto \prod_{ij} e^{-m_{ij}}\frac{m_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!},
\end{aligned}
$$

que indica que el esquema Multinomial es equivalente al esquema Poisson.

Esquema Multinomial-Producto

En este esquema se supone que los totales marginales por renglón (o columna) $n_{1\cdot}, n_{2\cdot}, \ldots, n_{I\cdot}$ (o $n_{\cdot 1}, n_{\cdot 2}, \ldots, n_{\cdot J}$) están fijos. Para estos, en cada renglón se tiene una distribución multinomial. Entonces, para el renglón i, $i = 1, \ldots, I$, las probabilidades son

$$
P(n_{ij}|m_{ij}) = \frac{n_{i\cdot}!}{\prod_{j=1}^{J} n_{ij}!}\prod_{j=1}^{J} p_{j|i}^{n_{ij}},
$$

donde $\sum_{i=1}^{I} n_{i\cdot} = n_{..}$, $\prod_{j=1}^{J} p_{j|i} = 1$, $m_{ij} = E(n_{ij}) = n_{i\cdot}p_{j|i}$, y $p_{j|i} = \frac{m_{ij}}{n_{i\cdot}}$.

Además. La verosimilitud es

$$
\begin{aligned}
L(m) &= L(\{m_{ij}\}) \\
&= \prod_{i=1}^{I}\left[\frac{n_{i\cdot}!}{\prod_{j=1}^{J} n_{ij}!}\prod_{j=1}^{J} p_{j|i}^{n_{ij}}\right] \qquad \text{dado que} \quad p_{j|i} = \frac{m_{ij}}{n_{i\cdot}} \\
&= \frac{\prod_i n_{i\cdot}!}{\prod_{ij} n_{ij}!}\prod_{ij}\left(\frac{m_{ij}}{n_{i\cdot}}\right)^{n_{ij}} \\
&= \frac{\prod_i n_{i\cdot}!}{\prod_{ij} n_{ij}!}\prod_{ij}\left(\frac{m_{ij}}{n_{i\cdot}}\right)^{n_{ij}} \frac{e^{-\sum_{ij} m_{ij}}}{e^{-m_{\cdot\cdot}}} \qquad \text{dado que} \quad n_{\cdot\cdot} = m_{\cdot\cdot} \\
&= \frac{\prod_i n_{i\cdot}!}{e^{-n_{\cdot\cdot}}\prod_{ij} n_{i\cdot}^{n_{ij}}}\prod_{ij}\left(e^{-m_{ij}}\frac{m_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!}\right) \\
&\propto \prod_{ij} e^{-m_{ij}}\frac{m_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!},
\end{aligned}
$$

que indica que el esquema Multinomial-Producto es equivalente al esquema Poisson.

Hipótesis de no asociación

La hipótesis nula en la Ji-Cuadrada (χ^2) de no asociación corresponde a “diferentes interpretaciones” para cada esquema de muestreo:

- Esquema Poisson: Independencia (las variables no están relacionadas).
- Esquema Multinomial: Independencia (la probabilidad conjunta es el producto de las probabilidades marginales).
- Esquema Multinomial-Producto: Homogeneidad (la distribución de probabilidad es la misma en cada renglón).