Sobre la Paradoja de los Dos Sobres

Federico J. O'Reilly *

El Dilema

¿Te quedas con el sobre que te dieron o lo intercambias por el otro?

La paradoja de los dos sobres, también conocida como la paradoja del intercambio o como el problema de las dos billeteras, es la siguiente:

Un benefactor pone una cierta cantidad de dinero, Z en un sobre; y pone el doble de esa cantidad, $2Z$, en otro sobre. La cantidad Z, así como la identificación del sobre que tiene la cantidad mayor, las desconoces. Para hacerlo más incierto, el benefactor selecciona al azar (con la misma probabilidad) uno de los sobres y te lo regala. El contenido de ese sobre es tuyo.

El razonamiento que conduce al resultado paradójico es: *Si Z es el contenido de tu sobre, entonces te das cuenta, aún sin abrirlo, que el otro sobre tiene en su interior, llámale W, o bien W=Z/2 o W=2Z, que debido a la selección aleatoria te da un "valor esperado" para lo del otro sobre de:*

$$E(W) = 1/2(Z/2) + 1/2(2Z) = (5/4)Z.$$

Así que razonas que deberías cambiar de sobre si te dieran la oportunidad de hacerlo ya que el valor esperado del contenido del segundo sobre, que calculaste como $(5/4)Z$, es mayor que Z. Lo paradógico es que hubieras razonado exactamente igual si te hubieran dado inicalmente ¡el otro sobre! Por ello, algo anda mal ya que no podrías usar este razonamiento cambiando el sobre una y otra vez esperando que estás haciendo lo correcto. Eso resulta francamente absurdo.

Esta es la famosa paradoja, discutida por muchos autores. Si navegas en Internet, encontrarás más de 750 sitios en los que refieren a este problema. Se presentan algunas referencias al final de esta nota, incluyendo el sitio de E. Schwitzgebel y J. Dever en el que presentan algunas ideas muy claras sobre el problema.

* Federico J. O'Reilly, IIMAS, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). e-mail federico@sigma.iimas.unam.mx. Traducción de STATS Issue 45 (2006), del autor.

Peras y Manzanas

Para el análisis denotemos por θ a la cantidad menor dentro de los sobres. Esto, para enfatizar el papel que juega θ como cantidad fija aunque desconocida; un parámetro. Recordemos que en el planteamiento del problema, enfrentas el dilema después de que una cantidad desconocida pero fija se puso en un sobre y el doble en el otro sobre. Esto lo tomamos al pie de la letra, como se dice usualmente.

Así que si tienes Z en tu sobre y supones que en el otro hay $Z/2$, como θ se fijó, esto significa que tu $Z = 2\theta$ y el otro sobre tiene $W = \theta$ en su interior. Recuerda que el benefactor dispuso de 3θ para repartir entre los dos sobres en proporción 1:2. Similarmente, si tienes Z y en el otro sobre hay $2Z$, no hay la menor duda de que tu $Z = \theta$ y en el otro sobre hay $W = 2\theta$.

Observa que el valor de Z no es el mismo en términos de θ en las dos posibilidades analizadas, sin embargo, cualquiera que sea el caso, con θ fijo, el valor esperado del contenido del segundo sobre es

$$E(W;\theta) = (1/2)\theta + (1/2)2\theta = (3/2)\theta.$$

Ese valor esperado es el mismo que $E(Z;\theta)$. Si se ve con cuidado el "dizque" valor esperado de $(5/4)Z$, nos percatamos que estuvo calculado incorrectamente pues sumamos "peras y manzanas", como lo mencionan atinadamente Schwitzgebel y Dever en su explicación. Ellos refieren por supuesto a poner los dos casos para W en términos de Z, que no tiene el mismo valor para ambas situaciones ($W = Z/2$ o $W = 2Z$), como ya se vió. Para sumar manzanas y manzanas, en términos de θ, si $W = Z/2$ es que $Z = 2\theta$ y si $W = 2Z$ es que $Z = \theta$, así el "promedio" de $Z/2$ y $2Z$ escrito correctamente en términos de θ es el promedio de θ y de 2θ, que da como resultado $(3/2)\theta$. Dado que el valor esperado de W y el de Z es el mismo (de hecho Z y W como variables aleatorias tienen exactamente la misma distribución), entonces no existe razón para intercambiar.

Punto de vista inferencial

Desde la óptica de la inferencia estadística, una vez que hayas abierto tu sobre y hayas encontrado que $Z = z$, es cierto que desde un punto de vista lógico y formal, hay dos posibilidades para el contenido del otro sobre, descrito éste en términos de tu z, ahora considerado fijo. Las dos posibilidades son que en el interior del otro sobre se tenga $W = z/2$ (que ocurrió si $\theta = z/2$) y tu sobre obtuvo la cantidad mayor, o bien que $W = 2z$ (que ocurrió si $\theta = z$) y tu sobre obtuvo la cantidad menor. Es evidente que no puede haber un sólo valor esperado para W en términos de z ya que hay dos posibilidades implícitas para θ. El valor z implica que sobre el parámetro θ ahora sabemos que debe ser uno de los dos valores del conjunto $\{z/2, z\}$, y eso es

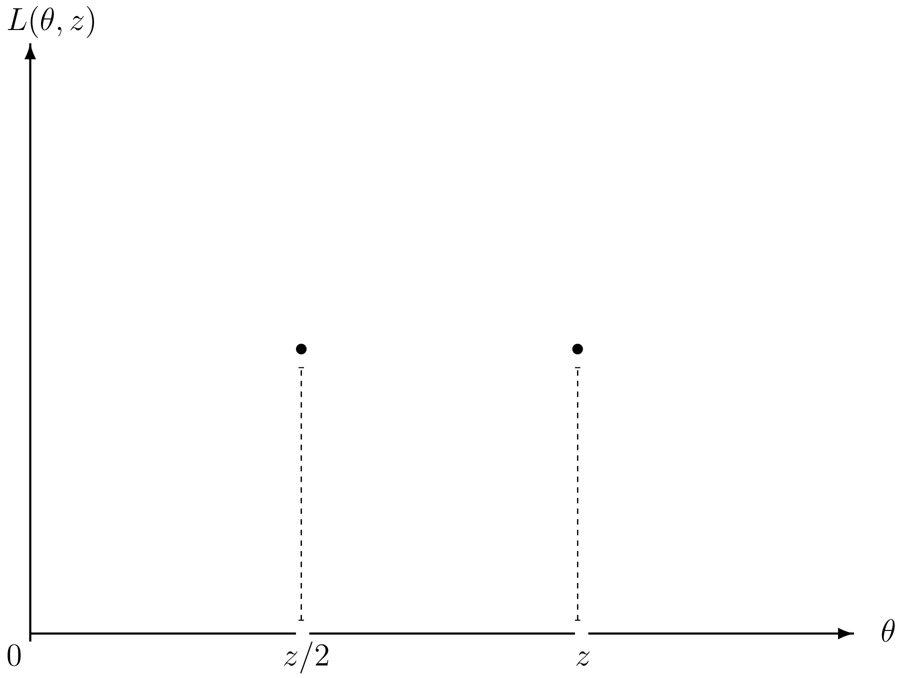

Figura 1: Función de Verosimilitud

todo lo que sabemos de él después de haber observado z. De hecho, la verosimilitud para θ, es la misma para los dos valores posibles. Observa la figura 1.

Así que ahora el razonamiento, desde el punto de vista de la inferencia estadística, es que z es una realización de Z que como ya se vió tiene la misma distribución que W y el conocer z nos es totalmente irrelevante para saber si nuestro z corresponde al sobre con la cantidad mayor o la cantidad menor. Las "ventajas" o "momios" (en Inglés *odds*) de tener el sobre con la cantidad mayor o el de la cantidad menor son 1:1; ¡igual a como eran antes de abrir el sobre! Por lo anterior no hay razón alguna para intercambiar sobres.

Decisiones

Conviene, a estas alturas del análisis, estudiar un problema diferente pero en cierta forma parecido y relacionado al planteado inicialmente. Este otro problema de hecho ha sido confundido equivocadamente en algunos artículos con el problema original. En este otro problema el benefactor pone una cantidad Z en un sobre y te lo regala. Después, el benefactor decide con la misma probabilidad si pone $Z/2$ o $2Z$ en un segundo sobre. Lo que deposita en ese segundo sobre tú lo ignoras. En este caso el valor esperado del contenido de ese segundo sobre es efectivamente $(5/4)Z$;

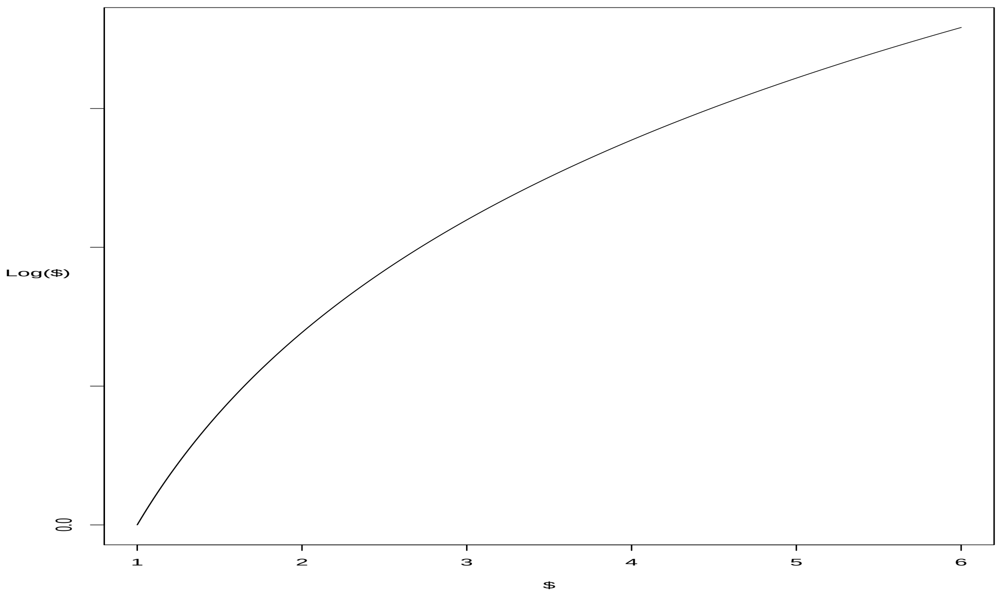

Figura 2: Función de Utilidad Logarítmica

ahora sí, una cantidad calculada correctamente para este problema diferente.

Si te preguntan, en este otro problema, si quieres intercambiar tu sobre, podrías decir que sí por ejemplo, si te dejaran "jugar" muchas veces este experimento y te dejaran quedarte lo que obtengas "en promedio", ya que hay teoría (la de probabilidades) que te dice que lo que obtengas en promedio va a ser parecido al valor esperado. Por cierto, este tipo de razonamiento es lo que asegura a los Casinos de Juego ganar muchísimo dinero ya que los valores esperados están siempre a su favor.

Sin embargo, si enfrentas una sola vez en tu vida el intercambiar tu sobre, que significa la posibilidad de tener hasta $2z$ o el quedarte sólo con $z/2$, tu decisión dependerá de cuanto dinero tienes, de qué tanto representa z en tu economía personal y a lo mejor también va a depender de tu estado de ánimo en el momento.

En economía y en teoría de decisiones hay un concepto llamado "utilidad" que pretende representar lo que a un individuo en particular le significa una cantidad de dinero; la satisfacción que le da. La utilidad depende de cada individuo y se modela usualmente con una función creciente; a más dinero más satisfacción, y cóncava, esto es, el incremento relativo en satisfacción es menor cuando la cantidad de dinero es grande respecto a cuando es pequeña. Puede usarse por ejemplo una función logarítmica para modelar la utilidad. Ver la figura 2.

Haciendo unas cuentas sencillas, podemos ver que en este segundo problema, si optamos por la función de utilidad logarítmica, entonces la utilidad esperada por intercambiar el sobre es exactamente igual a la utilidad asociada al contenido Z de tu sobre; o sea

$$E(\log W) = (1/2)\log(Z/2) + (1/2)\log(2Z) = \log(Z).$$

Así que si te sientes a gusto con esa función de utilidad debieras ser indiferente al intercambio de sobres.

Tómalo y Vete

El planteamiento del problema original crea una paradoja ilusoria por hacer un cálculo incorrecto de un valor esperado en que se ignora que θ es fijo. Si se abre el sobre, el conocer su contenido no cambia la ventaja (los momios) de tener el sobre con la cantidad mayor respecto a tener el de la cantidad menor. Los momios que se tenían antes de conocer el contenido; a saber 1:1, son los mismos que después de conocer el contenido. Por ello que no hay razón para intercambiar el sobre.

Sin embargo, en el problema diferente mencionado en la última parte del análisis, la posibilidad de poder repetir y quedarse con lo ganado "en promedio" o la utilización de una función de utilidad si no se puede repetir, deben ser tomadas en consideración para tomar una decisión adecuada, que será subjetiva, como ya se indicó.

En mi caso, si enfrentara el problema sólo una vez en la vida, yo me quedaría con z si un benefactor generoso me obsequia $z = 1$ millón de dólares; y quizás aunque sólo me diera $z =$ diez mil dólares, también me los quedaría. Se dice coloquialmente que "más vale pájaro en mano que ciento volando".

REFERENCIAS

Bruss, F.T. (1996), "The Fallacy of the Two-Envelopes Problem", *Math. Scientist* 21 112-119.

Casella, G., and Berger, R.L. (2002), *Statistical Inference* (2nd ed.), Duxbury Press.

Christensen, R., and Utts, J. (1992), "Bayesian Resolution of the Exchange Paradox", *The American Statistician* 46, 274-276.

Clark, M., and Shackel, N. (2000), "The Two-envelope Paradox", *Mind* (Vol. 109), July, 435.

Linzer, E. (1994), "The Two-Envelope Paradox", *The American Mathematical Monthly* 101, 417-419

Ridgway, T. (1993), "Letter to the Editor about The Exchange Paradox", *The American Satistician* 47, 311.

Schwitzgebel. www.faculty.ucr.edu/ eschwitz/SchwitzAbs/TwoEnvelopeSimple.htm