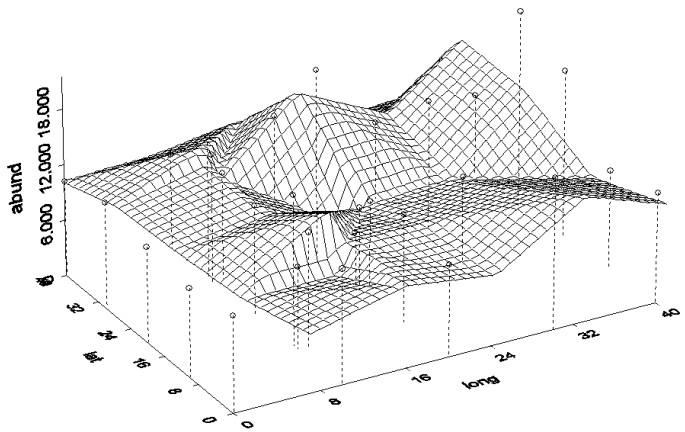
Contenido

1 Geoestadística

Geoestadística.

En geoestadística consideramos fenómenos aleatorios $\{Z(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^d\}$ con índice contínuo.

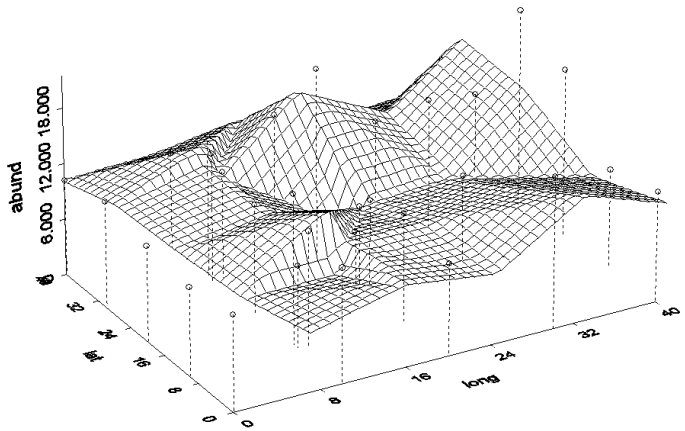
La fuente de nuestras observaciones $\{z(\mathbf{s}_1), \ldots, z(\mathbf{s}_n)\}$ es una realización incompleta de un campo aleatorio (*variable regionalizada*).



Geoestadística.

En geoestadística consideramos fenómenos aleatorios $\{Z(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^d\}$ con índice contínuo.

La fuente de nuestras observaciones $\{z(\mathbf{s}_1), \ldots, z(\mathbf{s}_n)\}$ es una realización incompleta de un campo aleatorio (*variable regionalizada*).



Geoestadística.

Los puntos $\{(\mathbf{s}_1), \ldots, z\mathbf{s}_n\}$ pueden escogerse de manera sistemática o aleatoria
Esto depende del objetivo del estudio y de los problemas en campo
Existen dos formas de analizar un *Campo Aleatorio*:

- Modelo Determinístico
- Modelo estocástico

Geoestadística.

El supuesto de existencia de un mecanismo aleatorio le da sentido al hablar de momentos de $Z(\mathbf{s})$, como:

$$E[Z(\boldsymbol{s})] = m(\mathbf{s})$$

o la covarianza centrada

$$\sigma_{uv} = E\left\{[Z(\mathbf{u}) - m(\mathbf{u})][Z(\mathbf{v}) - m(\mathbf{v})]\right\}$$

Geoestadística.

El supuesto de existencia de un mecanismo aleatorio le da sentido al hablar de momentos de $Z(\mathbf{s})$, como:

$$E[Z(\boldsymbol{s})] = m(\mathbf{s})$$

o la covarianza centrada

$$\sigma_{uv} = E\left\{[Z(\mathbf{u}) - m(\mathbf{u})][Z(\mathbf{v}) - m(\mathbf{v})]\right\}$$

Geoestadística.

El supuesto de existencia de un mecanismo aleatorio le da sentido al hablar de momentos de $Z(\mathbf{s})$, como:

$$E[Z(\boldsymbol{s})] = m(\mathbf{s})$$

o la covarianza centrada

$$\sigma_{uv} = E\left\{[Z(\mathbf{u}) - m(\mathbf{u})][Z(\mathbf{v}) - m(\mathbf{v})]\right\}$$

Geoestadística.

El supuesto de existencia de un mecanismo aleatorio le da sentido al hablar de momentos de $Z(\mathbf{s})$, como:

$$E[Z(\boldsymbol{s})] = m(\mathbf{s})$$

o la covarianza centrada

$$\sigma_{uv} = E\left\{[Z(\mathbf{u}) - m(\mathbf{u})][Z(\mathbf{v}) - m(\mathbf{v})]\right\}$$

Geoestadística.

La geoestadística ataca diferentes tipos de problemas, por ejemplo:

- Predicción del valor de Z en un punto no visitado $\mathbf{s}_0$ o en un volúmen V centrado en $\mathbf{s}_0$
- Modelado de la asociación entre Z y factores externos (Clima, entorno biológico, etc)
- Delimitación de áreas críticas ($Z > Z_c$)

Todo esto ya sea en el caso uni o multivariado.

Geoestadística.

La geoestadística ataca diferentes tipos de problemas, por ejemplo:

- Predicción del valor de Z en un punto no visitado $\mathbf{s}_0$ o en un volúmen V centrado en $\mathbf{s}_0$
- Modelado de la asociación entre Z y factores externos (Clima, entorno biológico, etc)
- Delimitación de áreas críticas ($Z > Z_c$)

Todo esto ya sea en el caso uni o multivariado.

Geoestadística.

La geoestadística ataca diferentes tipos de problemas, por ejemplo:

- Predicción del valor de Z en un punto no visitado $\mathbf{s}_0$ o en un volúmen V centrado en $\mathbf{s}_0$
- Modelado de la asociación entre Z y factores externos (Clima, entorno biológico, etc)
- Delimitación de áreas críticas ($Z > Z_c$)

Todo esto ya sea en el caso uni o multivariado.

Geoestadística.

La geoestadística ataca diferentes tipos de problemas, por ejemplo:

- Predicción del valor de Z en un punto no visitado $\mathbf{s}_0$ o en un volúmen V centrado en $\mathbf{s}_0$
- Modelado de la asociación entre Z y factores externos (Clima, entorno biológico, etc)
- Delimitación de áreas críticas ($Z > Z_c$)

Todo esto ya sea en el caso uni o multivariado.

Geoestadística.

La geoestadística ataca diferentes tipos de problemas, por ejemplo:

- Predicción del valor de Z en un punto no visitado $\mathbf{s}_0$ o en un volúmen V centrado en $\mathbf{s}_0$
- Modelado de la asociación entre Z y factores externos (Clima, entorno biológico, etc)
- Delimitación de áreas críticas ($Z > Z_c$)

Todo esto ya sea en el caso uni o multivariado.

Geoestadística.

Como hacer inferencias con una sola realización de un proceso?

Geoestadística.

Como hacer inferencias con una sola realización de un proceso?

Necesitamos hacer supuestos de homogeneidad.

Geoestadística.

Como hacer inferencias con una sola realización de un proceso?

Necesitamos hacer supuestos de homogeneidad.

Estos supuestos nos permitirán suponer que lo observado es válido hasta cierto rango y por lo tanto podremos hacer inferencias locales.

Geoestadística.

Como hacer inferencias con una sola realización de un proceso?

Necesitamos hacer supuestos de homogeneidad.

Estos supuestos nos permitirán suponer que lo observado es válido hasta cierto rango y por lo tanto podremos hacer inferencias locales.

Los supuestos de homogeneidad que haremos se conocen como supuestos de estacionariedad.

Geoestadística.

Definition

Un proceso estocástico $Z(\mathbf{s})$ se dice Estrictamente Estacionario si y solo si sus distribuciones de dimensión finitas son invariantes ante translaciones, es decir,

$$\{Z(\mathbf{s}_1), \ldots, Z(\mathbf{s}_n)\} = \{Z(\mathbf{s}_1 + \mathbf{h}), \ldots, Z(\mathbf{s}_n + \mathbf{h})\}$$

Geoestadística.

Definition

Un proceso estocástico $Z(\mathbf{s})$ se dice Estrictamente Estacionario si y solo si sus distribuciones de dimensión finitas son invariantes ante translaciones, es decir,

$$\{Z(\mathbf{s}_1), \ldots, Z(\mathbf{s}_n)\} = \{Z(\mathbf{s}_1 + \mathbf{h}), \ldots, Z(\mathbf{s}_n + \mathbf{h})\}$$

La estacionariedad estricta es difícil que se cumpla, por lo que se puede relajar

Geoestadística.

Definition

Un proceso estocástico $Z(\mathbf{s})$ se dice Estrictamente Estacionario si y solo si sus distribuciones de dimensión finitas son invariantes ante translaciones, es decir,

$$\{Z(\mathbf{s}_1), \ldots, Z(\mathbf{s}_n)\} = \{Z(\mathbf{s}_1 + \mathbf{h}), \ldots, Z(\mathbf{s}_n + \mathbf{h})\}$$

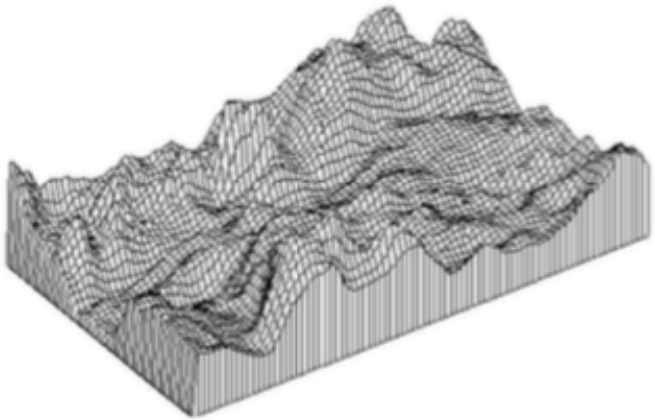
La estacionariedad estricta es difícil que se cumpla, por lo que se puede relajar

Definition

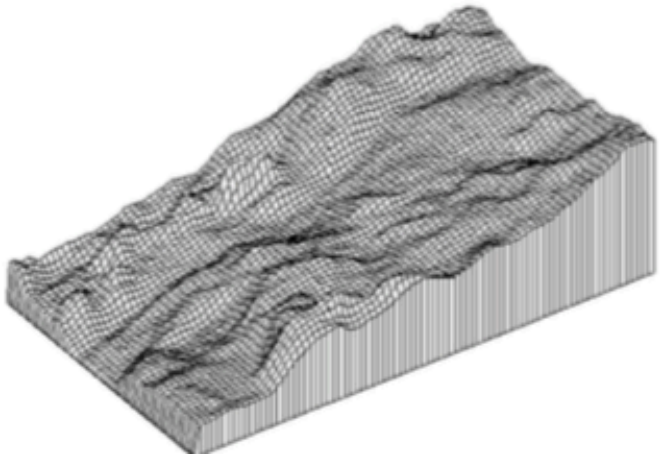
Un proceso estocástico $Z(\mathbf{s})$ se dice estacionario de segundo orden si y solo sí
$E[Z(\mathbf{s})] = m$ y además $Cov[Z(\mathbf{s}), Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})] = C(||h||)$

Geoestadística.

Proceso Estacionario y No estaconario



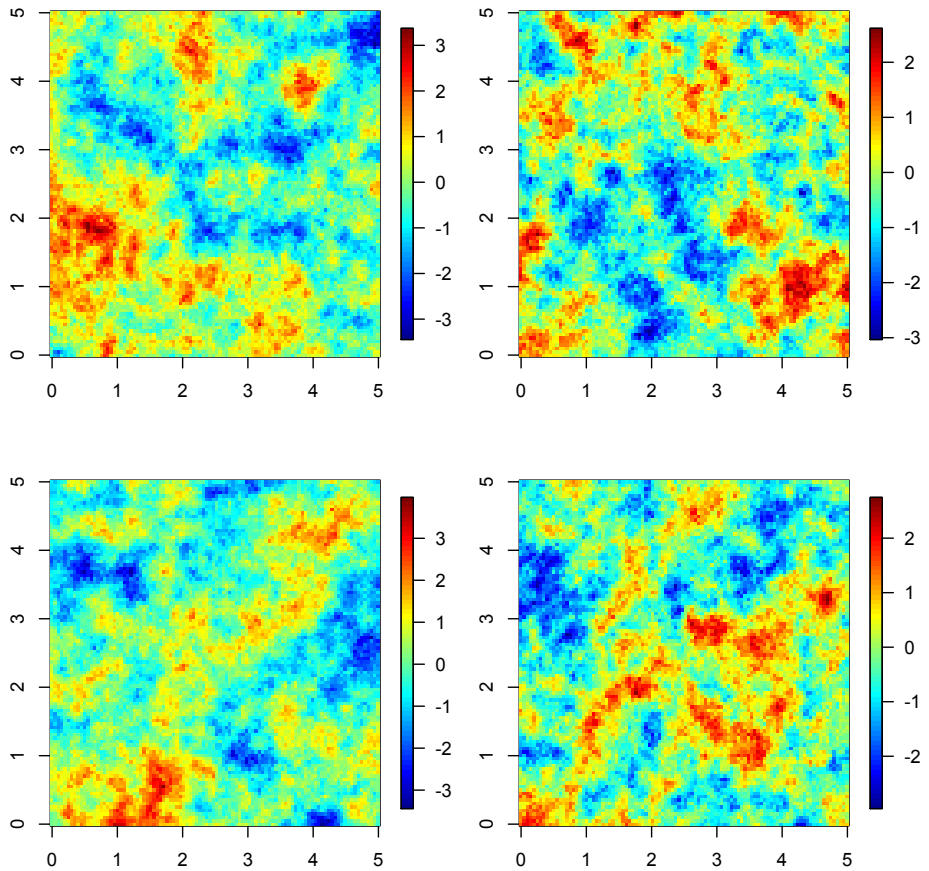
estacionario



No estacionario

Geoestadística.

Cuatro realizaciones de un proceso Gaussiano



Geoestadística.

En geoestadística, la dependencia espacial se modela con el variograma.

a) Si $E[Z(\mathbf{s})] = m$, el variograma se define como

$$E[Z(\mathbf{s})] = \mathbf{m} \qquad \mathbf{Var}[\mathbf{Z(u)} - \mathbf{Z(v)}] = \gamma(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|)$$

Si el variograma existe y la media es constante, se dice que se cumple la hipótesis intrínseca

Geoestadística.

En geoestadística, la dependencia espacial se modela con el variograma.

a) Si $E[Z(\mathbf{s})] = m$, el variograma se define como

$$E[Z(\mathbf{s})] = \mathbf{m} \qquad \mathbf{Var}[\mathbf{Z(u)} - \mathbf{Z(v)}] = \gamma(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|)$$

Si el variograma existe y la media es constante, se dice que se cumple la hipótesis intrínseca

Geoestadística.

El variograma debe satisfacer varias condiciones. Diremos que una función $g(\mathbf{h})$ es un modelo permisible de variograma si:

- Es continua (excepto tal vez en el origen)
- Es no negativa para toda $\mathbf{h}$
- $$-\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j g(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) \geq 0 \quad (1)$$

  para cualesquiera puntos $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n \in \mathcal{R}^k$ y cualesquiera pesos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathcal{R}$.

Geoestadística.

El variograma debe satisfacer varias condiciones. Diremos que una función $g(\mathbf{h})$ es un modelo permisible de variograma si:

- Es continua (excepto tal vez en el origen)
- Es no negativa para toda $\mathbf{h}$
- $$-\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j g(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) \geq 0 \quad (1)$$

  para cualesquiera puntos $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n \in \mathcal{R}^k$ y cualesquiera pesos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathcal{R}$.

Geoestadística.

El variograma debe satisfacer varias condiciones. Diremos que una función $g(\mathbf{h})$ es un modelo permisible de variograma si:

- Es continua (excepto tal vez en el origen)
- Es no negativa para toda $\mathbf{h}$
-

$$-\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j g(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) \geq 0 \tag{1}$$

para cualesquiera puntos $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n \in \mathcal{R}^k$ y cualesquiera pesos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathcal{R}$.

Geoestadística.

El variograma debe satisfacer varias condiciones. Diremos que una función $g(\mathbf{h})$ es un modelo permisible de variograma si:

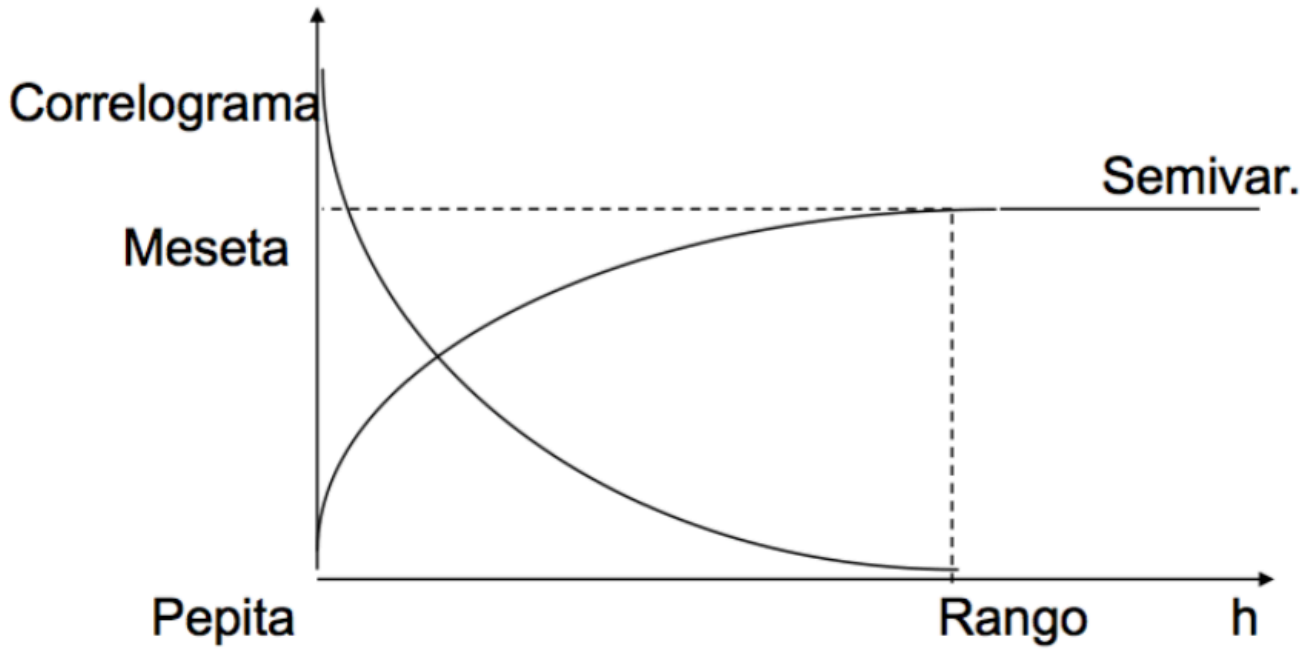
- Es continua (excepto tal vez en el origen)
- Es no negativa para toda $\mathbf{h}$
- $$-\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j g(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) \geq 0 \quad (1)$$

  para cualesquiera puntos $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n \in \mathcal{R}^k$ y cualesquiera pesos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathcal{R}$.

Geoestadística.

Si $Z(\mathbf{s})$ es estacionario de segundo orden, su covarianza y el variograma se relacionan así.

Relación entre la covarianza y el variograma



Tanto la covarianza como el variograma son funciones simétricas

$$C(\mathbf{h}) = C(-\mathbf{h}) \qquad ; \gamma(\mathbf{h}) = \gamma(-\mathbf{h})$$

Conociendo el semivariograma o la covarianza en varias direcciones es posible interpretar los razgos direccionales del fenómeno.

La forma funcional de la covarianza y del variograma debe garantizar que la varianza de combinaciones lineales de $Z(\mathbf{s})$ sea no negativa

Geoestadística

En la práctica se calcula el variograma empírico

Geoestadística

En la práctica se calcula el variograma empírico

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{N_h} \sum_{N_h} \gamma[Z(\mathbf{s}_i) - Z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h})]$$

Geoestadística

En la práctica se calcula el variograma empírico

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{N_h} \sum_{N_h} \gamma[Z(\mathbf{s}_i) - Z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h})]$$

Se ajusta algún modelo de la forma $g(\mathbf{h}) = C_0 + C_1 f(\mathbf{h})$

Geoestadística

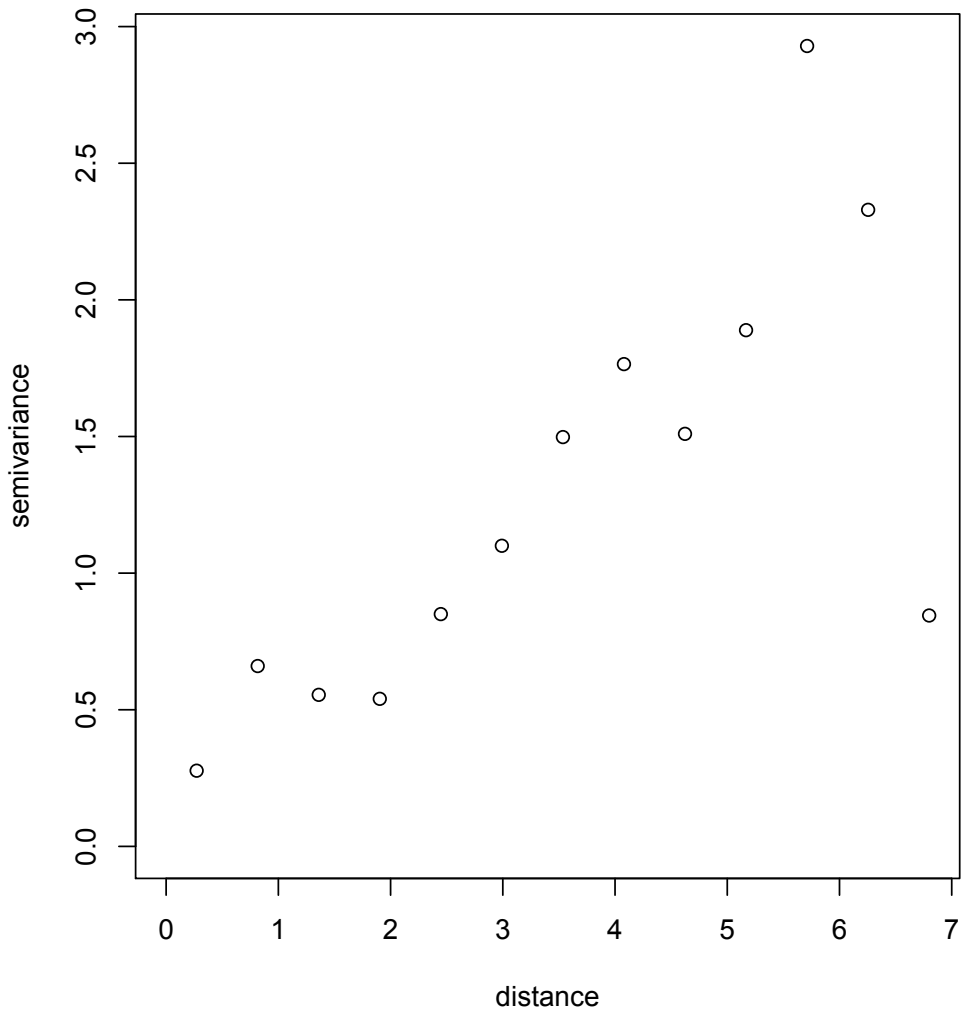
En la práctica se calcula el variograma empírico

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{N_h} \sum_{N_h} \gamma[Z(\mathbf{s}_i) - Z(\mathbf{s}_i + \mathbf{h})]$$

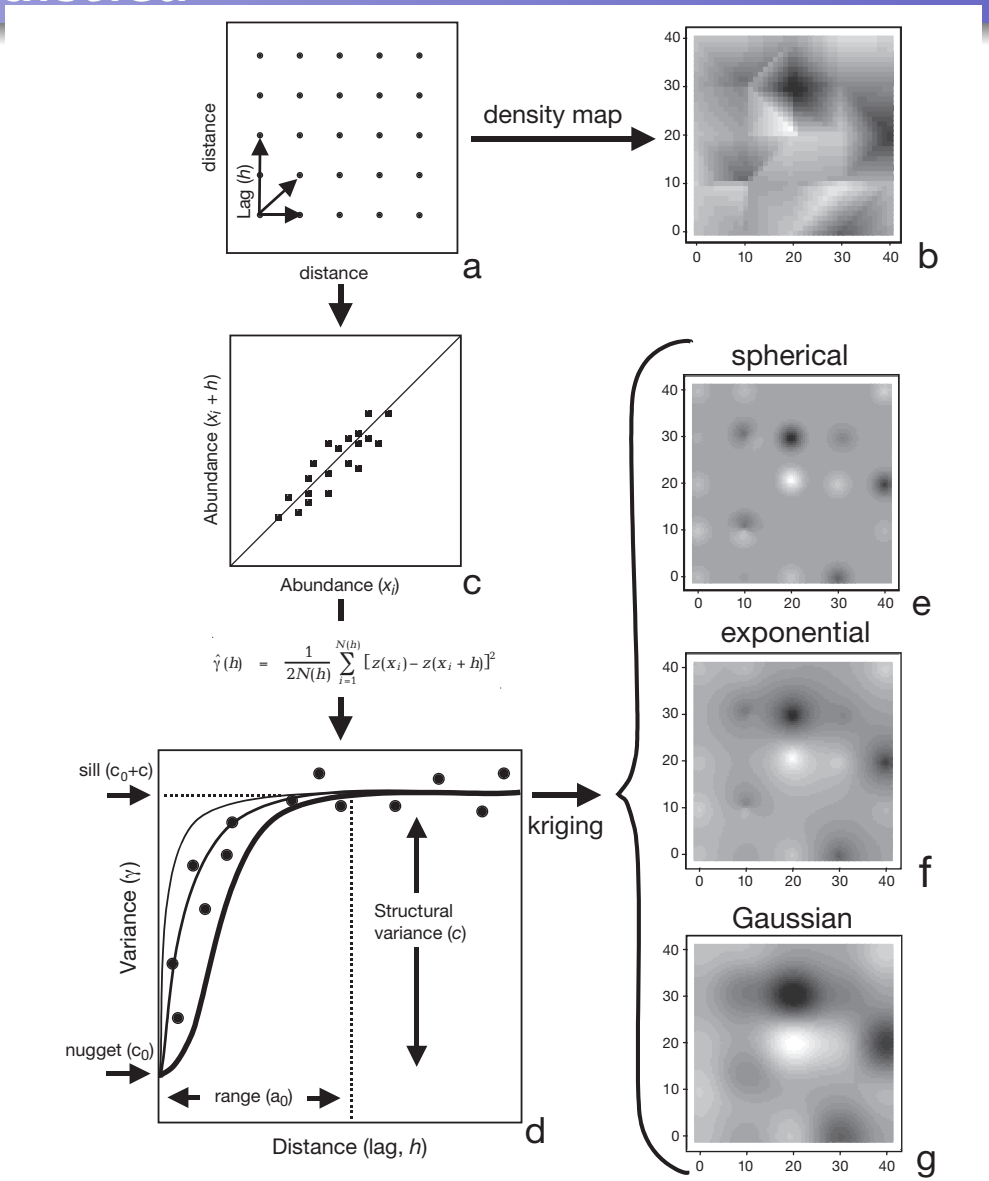
Se ajusta algún modelo de la forma $g(\mathbf{h}) = C_0 + C_1 f(\mathbf{h})$

C_0 es la pepita, $C_0 + C_1$ es la meseta y $f(\cdot)$ es una función monótona creciente en h

Geostadística



Geostadística



Geostadística

Los modelos más comunmente utilizados son:

a) Esférico

$$\gamma(||h||) = \begin{cases} C_1[\frac{3}{2}(\frac{||h||}{r}) + \frac{1}{2}(\frac{||h||}{r})^3] & 0 \leq ||h|| \leq r \\ C_1 & ||h|| > r \end{cases}$$

b) Exponencial

$$\gamma(||h||) = C_1 \left\{ 1 - exp\left(-\frac{||h||}{r} \right) \right\}$$

c) Gausiano

$$\gamma(||h||) = C_1 \left\{ 1 - exp\left[-\left(\frac{||h||}{r} \right)^2 \right] \right\}$$

Geostadística

d) Lineal

$$\gamma(||h||) = C_1||h||$$

f) Clase Mátern

$$\gamma(||h||) = c_1\left\{1 - \frac{1}{2^{\theta_2-1}\Gamma(\theta_2)}\left(\frac{2||h||\sqrt{\theta_2}}{\theta_1}\right)K_{\theta 2}\left(\frac{2||h||\sqrt{\theta_2}}{\theta_1}\right)\right\}$$

$K(\theta_2)$ es una función de Bessel de orden θ_2
θ_1 controla el rango de asociación espacial
θ_2 es un parámetro de suavizamiento.
Si $\theta_2 = \frac{1}{2}$ nos da el modelo exponencial
Si $\theta_2 \to \infty$ nos da el modelo Gaussiano

Geostadística

d) Lineal

$$\gamma(||h||) = C_1||h||$$

f) Clase Mátern

$$\gamma(||h||) = c_1\left\{1 - \frac{1}{2^{\theta_2-1}\Gamma(\theta_2)}\left(\frac{2||h||\sqrt{\theta_2}}{\theta_1}\right)K_{\theta 2}\left(\frac{2||h||\sqrt{\theta_2}}{\theta_1}\right)\right\}$$

$K(\theta_2)$ es una función de Bessel de orden θ_2
θ_1 controla el rango de asociación espacial
θ_2 es un parámetro de suavizamiento.
Si $\theta_2 = \frac{1}{2}$ nos da el modelo exponencial
Si $\theta_2 \to \infty$ nos da el modelo Gaussiano

Geostadística

d) Lineal

$$\gamma(||h||) = C_1||h||$$

f) Clase Mátern

$$\gamma(||h||) = c_1\left\{1 - \frac{1}{2^{\theta_2-1}\Gamma(\theta_2)}\left(\frac{2||h||\sqrt{\theta_2}}{\theta_1}\right)K_{\theta 2}\left(\frac{2||h||\sqrt{\theta_2}}{\theta_1}\right)\right\}$$

$K(\theta_2)$ es una función de Bessel de orden θ_2
θ_1 controla el rango de asociación espacial
θ_2 es un parámetro de suavizamiento.
Si $\theta_2 = \frac{1}{2}$ nos da el modelo exponencial
Si $\theta_2 \to \infty$ nos da el modelo Gaussiano

Geostadística

d) Lineal

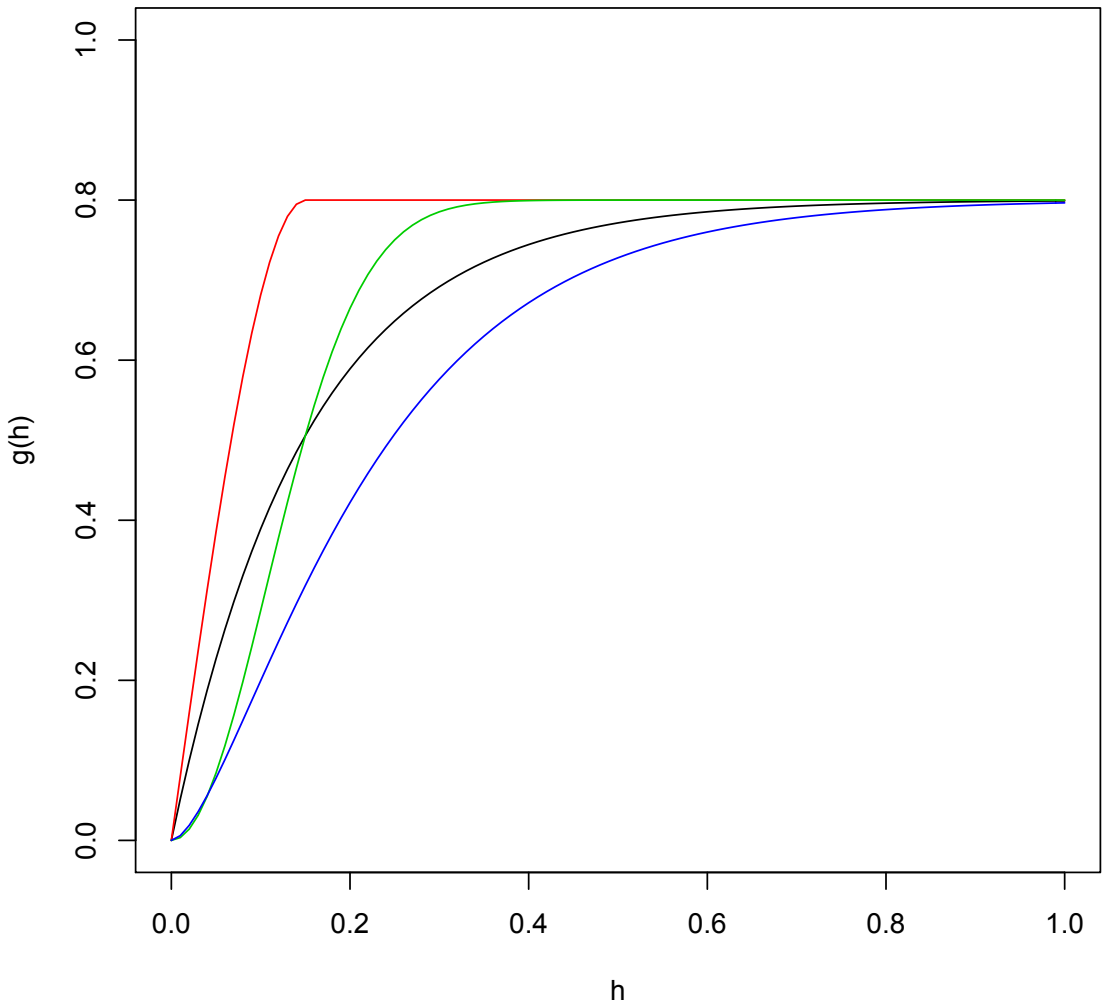
$$\gamma(||h||) = C_1||h||$$

f) Clase Mátern

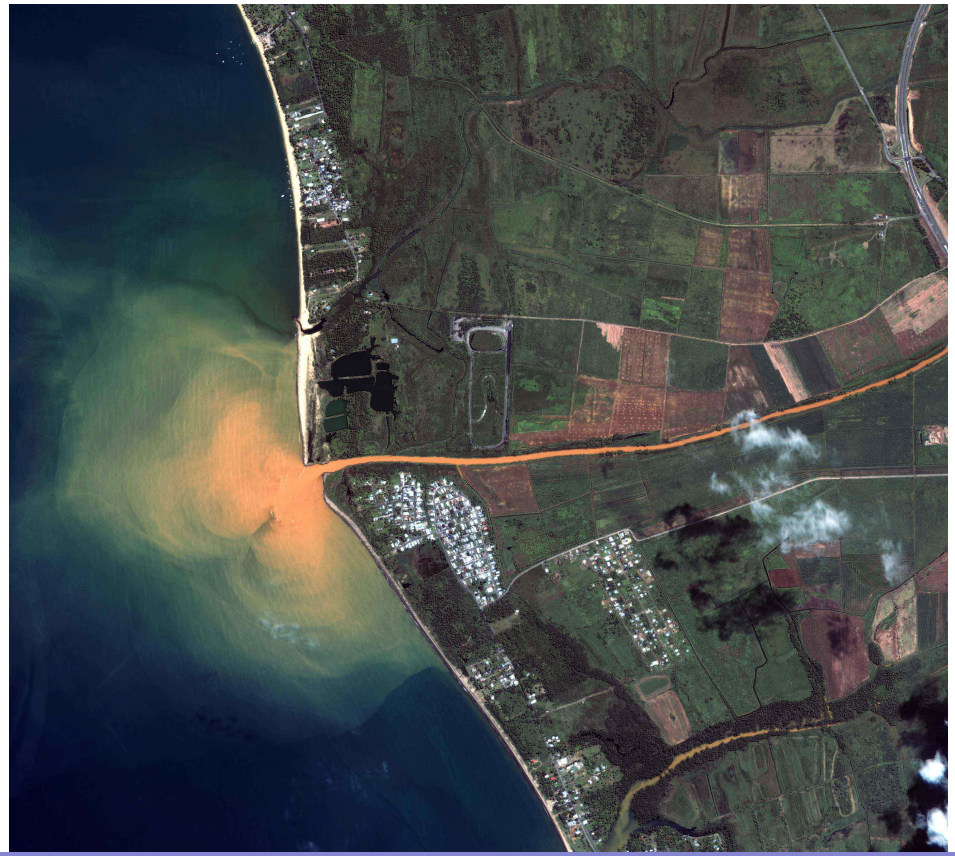
$$\gamma(||h||) = c_1\left\{1 - \frac{1}{2^{\theta_2-1}\Gamma(\theta_2)}\left(\frac{2||h||\sqrt{\theta_2}}{\theta_1}\right)K_{\theta 2}\left(\frac{2||h||\sqrt{\theta_2}}{\theta_1}\right)\right\}$$

$K(\theta_2)$ es una función de Bessel de orden θ_2
θ_1 controla el rango de asociación espacial
θ_2 es un parámetro de suavizamiento.
Si $\theta_2 = \frac{1}{2}$ nos da el modelo exponencial
Si $\theta_2 \to \infty$ nos da el modelo Gaussiano

Geostadística



Geoestadística.

Cuando la variable se distribuye en $\mathcal{R}^2$ o $\mathcal{R}^3$, tanto el semivariograma como la covarianza pueden cambiar de forma al cambiar la dirección

En este caso decimos que el fenomeno es *anisotrópico*.